

**Ein Beitrag zur
Theorie und Anwendung
wertdiskreter Adaptionungsverfahren
in digitalen Empfängern**

Der Technischen Fakultät der
Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades
DOKTOR-INGENIEUR

vorgelegt von

Bernd Friedrichs

Erlangen 1991

Als Dissertation genehmigt von der
Technischen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung : 8. Januar 1990

Tag der Promotion : 18. Dezember 1990

Dekan : Prof. Dr. G.Kuhn

Berichterstatter : Prof. Dr. H.W.Schüßler

Prof. Dr. B.Dejon

Herrn Prof. Dr. H.W.Schüßler gilt mein besonderer Dank für viele wertvolle Hinweise und Anregungen und seine fördernde Kritik bei der Niederschrift.

Herrn Prof. Dr. B.Dejon danke ich für die Übernahme des Koreferats und für sein großes Interesse an dieser Arbeit.

Ferner danke ich meinen Kollegen von ANT Nachrichtentechnik Backnang für ihre Unterstützung und Gesprächsbereitschaft.

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen	5
1 Einführung	10
1.1 Aufgabenstellung und Ziele der Arbeit	10
1.2 Stand der Technik	11
1.3 Besondere Merkmale	12
1.4 Beispiele für Kompensationsfilter	13
1.4.1 Kompensationsfilter beim Einsatz als EC	13
1.4.2 Kompensationsfilter beim Einsatz als DFE	14
ERSTER TEIL : THEORIE	16
2 Die Berechnung von Restfehler und Konvergenzgeschwindigkeit	16
2.1 Prinzip des Kompensationsfilters	17
2.2 Wertkontinuierliche Adaption (K-Adaption)	20
2.2.1 Prinzip des stochastischen Gradientenverfahrens	20
2.2.2 Restfehler und Konvergenzgeschwindigkeit	24
2.3 Allgemeine wertdiskrete Adaption (Q-Adaption)	28
2.3.1 Implementierung	28
2.3.2 Formulierung des Iterationsverfahrens der Restsignal-Varianzen mit den Funktionen W, S, T	29
2.3.3 Analyse der Funktion W	33

2.3.3.1	Berechnung von W bei beliebiger Verteilung des Signals u_k	33
2.3.3.2	Berechnung von W bei Taylor-Entwickelbarkeit der Verteilungsdichtefunktion des Signals u_k	38
2.3.4	Analyse der Funktion S	40
2.3.5	Restfehler und Konvergenzgeschwindigkeit	42
2.3.6	Optimierung der Quantisierungskennlinie	44
2.4	Sign-Adaption (S-Adaption)	46
2.4.1	Restfehler und Konvergenzgeschwindigkeit	46
2.4.2	Beispiele mit künstlichen Verteilungen	50
2.4.3	Vergleich mit dem Stand der Technik	54
2.5	Der Einfluß von stark korrelierten Leitungscodes	55
2.5.1	Allgemeine Autokorrelationsmatrizen	55
2.5.2	K-Adaption	56
2.5.2.1	Restfehler	56
2.5.2.2	Konvergenzgeschwindigkeit	60
2.5.3	S-Adaption	63
2.5.3.1	Restfehler	63
2.5.3.2	Konvergenzgeschwindigkeit	63
2.6	Zusammenfassung	64
3	Die Berechnung der Restsignal-Verteilung	67
3.1	Vorbemerkungen	68
3.1.1	Existenz einer Grenzverteilung	68
3.1.2	Besondere Eigenschaften des Restsignals	68
3.1.2.1	Beschränktheit des Restsignals	68
3.1.2.2	Kontinuierliche und diskrete Restsignale	69
3.1.3	Vereinfachung der Aufgabenstellung	69
3.2	K-Adaption	70

3.2.1	Herleitung verschiedener Grundgleichungen und einfache Folgerungen	70
3.2.2	Grenzverteilung des Restsignals bei $\alpha \rightarrow 0$	73
3.3	S-Adaption	75
3.3.1	Herleitung einer Grundgleichung und einfache Folgerungen	75
3.3.2	Situation bei Taylor-Entwickelbarkeit der Verteilungsdichtefunktion des Signals u_k und Grenzverteilung bei $\alpha \rightarrow 0$	76
3.3.3	Situation bei diskretem Signal u_k und Grenzverteilung bei $\alpha \rightarrow 0$	79
4	Statistische Theorie der Quantisierung	83
4.1	Vorbemerkungen und Voraussetzungen	83
4.2	Darstellungen für $Q(x)$ und $\Delta(x)$	85
4.3	Die Quantisierungstheoreme	88
4.3.1	Bedingungen für eine Quantisierung ohne Informationsverlust in den Verteilungen	89
4.3.2	Bedingungen für einen gleichmäßig verteilten Quantisierungsfehler	90
4.3.3	Bedingungen für die Unkorreliertheit von Signal und Quantisierungsfehler	91
4.4	Quantisierung eines Summensignals mit statistisch unabhängigen Komponenten	91
4.4.1	Bedingungen für die paarweise statistische Unabhängigkeit der Summensignal-Komponenten vom Quantisierungsfehler	92
4.4.2	Quantisierung mit Dither-Signalen	93
	ZWEITER TEIL : ANWENDUNGEN	95
5	Berechnung der Störleistungen in einem speziellen Vollduplex-Empfänger	95
5.1	Modell des Empfängers	96
5.2	Theoretische Berechnung der Störleistungen	99
5.3	Modelle für die Verteilung des Nutzsignals	101

5.4	Simulationsergebnisse	103
5.4.1	Allgemeine Bemerkungen zum Simulations-Prinzip einer Einlaufkurve	104
5.4.2	Allgemeine Bemerkungen zu den Simulationsrechnungen . . .	105
5.4.3	EC-Adaption	106
5.4.3.1	K- und S-Adaption bei unkorrelierten Leitungscodes	107
5.4.3.2	K- und S-Adaption bei korrelierten Leitungscodes . .	111
5.4.3.3	S- und Q-Adaption bei unkorrelierten Leitungscodes	116
5.4.4	Gemeinsame Adaption von EC und DFE	120
6	Wortlängen-Dimensionierung eines speziellen Vollduplex-Empfängers nach der Fehlerwahrscheinlichkeit	125
6.1	Berechnung der Störleistungen als Funktion der Wortlängen	126
6.2	Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit als Funktion der Wortlängen	127
6.3	Beispiel einer exakten Wortlängen-Dimensionierung	129
A	Anhang : Einfache mathematische Grundlagen und Beweise	134
A.1	Grundbegriffe zu Zufallsvariablen	134
A.2	Bedingte Verteilungen	136
A.3	Typen und Beschreibungen von Quantisierungskennlinien	137
A.4	Konvergenz von Iterationsverfahren	141
A.5	Beweis von Satz 2.2	142
A.6	Beweis von Satz 2.3	145
A.7	Zur Varianzberechnung von Varianzschätzungen	146
	Literaturverzeichnis	149

Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen

a_k	zufällige Daten zur Zeit k bzw. in §5 Sendewerte des nahen Teilnehmers
\mathbf{a}_k	$= (a_k, a_{k-1}, \dots, a_{k-L+1})^T$
$\tilde{\mathbf{a}}_k$	$= \mathbf{V}^T \mathbf{a}_k$, siehe (2.5-3)
$\alpha, \alpha_{\text{DFE}}$	Verstellgröße des allgemeinen adaptiven Filters bzw. des EC, des DFE
α_u	$= \alpha/D\{u_k\} = \alpha/\sigma_u$
α_{max}	obere Grenze für die Verstellgröße
b_k, \hat{b}_{k-v}	zufällige Daten zur Zeit k bzw. in §5 Sendewerte des fernen Teilnehmers, verzögerte Schätzung dafür
\mathbf{c}_k	L -dim. Koeffizientenvektor des adaptiven Filters
$\mathbf{c}_{\text{opt}}, \mathbf{c}_{Q,\text{opt}}$	optimale wertkontinuierliche, wertdiskrete Koeffizienten-Einstellung
$C_x(\chi), C_{x_N}(\chi)$	charakteristische Funktion der allgemeinen Zufallsvariablen x bzw. der normierten Zufallsvariablen $x_N = x/D\{x\}$
\mathbf{d}_k	L -dim. Vektor gemäß (2.5-28)
$D\{.\}$	Streuungs-Operator
$\text{Diag}(.)$	Diagonalmatrix zum angegebenen Vektor
$\delta_i, \mathbf{\Delta}$	Eigenwerte der Matrix \mathbf{F} ($0 \leq i \leq L-1$), Diagonalmatrix der Eigenwerte
$\Delta(x)$	$= Q(x) - x$: Quantisierungsfehler als Funktion der allgemeinen Zufallsvariablen x
$\delta_{\text{AD},k}$	Quantisierungsfehler am A/D-Wandler
$\delta_{i,j}$	Kronecker-Symbol

$\delta(\cdot), \delta_{-1}(\cdot)$	Dirac-Funktion, Sprungfunktion
$e_k, e_{\text{opt},k}$	gesamter Entscheiderfehler bzw. Entscheiderfehler bei optimaler Koeffizienten-Einstellung gemäß (5.1-4)
$E\{.\mid.\}$	bedingter Erwartungswert-Operator
\mathbf{E}	(L, L) -dim. Einheitsmatrix
$\boldsymbol{\varepsilon}_k$	$= \mathbf{c}_{\text{opt}} - \mathbf{c}_k$: L -dim. Vektor der Koeff.-Fehleinstellung
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$	$= \mathbf{V}^T \boldsymbol{\varepsilon}_k$, siehe (2.5-3)
f_n	siehe (3.3-17)
$f_x(\cdot), f_{x_N}(\cdot)$	Verteilungsdichtefunktion der allgemeinen Zufallsvariablen x bzw. der normierten Zufallsvariablen $x_N = x/D\{x\}$
$F_x(\cdot), F_{x_N}(\cdot)$	Verteilungsfunktion der allgemeinen Zufallsvariablen x bzw. der normierten Zufallsvariablen $x_N = x/D\{x\}$
$F(\mathbf{c}_k), F_{\text{min}}$	mittlerer quadratischer Fehler bei \mathbf{c}_k gemäß (2.2-1), bei \mathbf{c}_{opt} gemäß (2.2-2)
$\mathbf{F}, \hat{\mathbf{F}}_k$	(L, L) -dim. Konvergenzmatrix gemäß (2.5-26) bzw. (2.5-37)
\mathbf{g}	$= (g_0, \dots, g_{L-1})^T$: Abtastwerte der Impulsantwort des unbekanntes Systems
$h_\varphi(\cdot)$	Hilfsfunktion gemäß (2.3-19)
$J(\alpha)$	siehe (2.5-18)
k	Laufindex für Taktnummern
K	AGC-Verstärkungsfaktor
L, L_{DFE}	Länge des adaptiven Filters allgemein bzw. des EC, des DFE
$\lambda_i, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{A}$	Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{\Phi}_{aa}$ ($0 \leq i \leq L-1$), Vektor der Eigenwerte, Diagonalmatrix der Eigenwerte

M_{AD}	maximaler Ausgangswert des A/D-Wandlers
M_C, M_{CDFE}	maximaler Wert der EC-, der DFE-Koeffizienten
M_{2r}	normierte Restsignal-Momente gemäß (2.3-29)
n	Laufindex für Sprungstellen des Quantisierers Q
n_k	weißes gaußsches Rauschsignal zur Zeit k
$N(\mu, \sigma^2)$	Kurzschreibweise für die Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
$P\{.\}$	Wahrscheinlichkeit des angegebenen Ereignisses
P_a	bedingte Fehlerwahrscheinlichkeit, siehe §6.2
$\varphi_k, \varphi_{N,k}$	Restsignal bzw. auf Varianz 1 normiertes Restsignal zur Zeit k beim adaptiven Filter allgemein bzw. beim EC
$\varphi_{DFE,k}$	Restsignal zur Zeit k beim DFE
Φ_{aa}	(L, L) -dim. Autokorrelationsmatrix der Sendefolge a_k
q	Quantisierungsschrittweite (Abstand der quantisierten Werte) bei der Quantisierung allgemein, speziell der Verstellsinformation für das adaptive Filter
q'	äquidistanter Sprungstellen-Abstand bei der Quantisierung allgemein, speziell der Verstellsinformation für das adaptive Filter
q_{AD}	Quantisierungsschrittweite des A/D-Wandlers
q_c	Abstand im Wertebereich der Koeffizienten des adaptiven Filters
q_a	Abstand im Wertebereich der Daten a_k (entweder 1 oder 2) gemäß (2.3-2)
$Q(.)$	Quantisierungsfunktion allgemein bzw. speziell der Verstellsinformation für das adaptive Filter
$Q_{AD}(.)$	Quantisierungsfunktion des A/D-Wandlers

r	Laufindex für Ableitungen der Verteilungsdichtefunktion
$\text{rect}(\cdot)$	Rechteckfunktion gemäß (A.1-8)
$R^2, R_k^2, R_\infty^2, \hat{R}_k^2$	Leistungsverhältnis von Restsignal zum nicht-kompensierbaren Signal allgemein, zur Zeit k , für $k \rightarrow \infty$, Schätzung gemäß (5.4-4)
$R_k^2, R_k^{*2}, R_{\text{DFE},k}^2$	R^2 für EC (bezogen auf u_k bzw. u_k^*), R^2 für DFE
\mathcal{R}	Menge der reellen Zahlen
ϱ	Korrelationskonstante, siehe (2.2-21) und (2.2-25)
s_n	Sprungstellen des Quantisierers Q
$\text{si}(x)$	$= \sin(x)/x$
$S(\sigma), S^*$	siehe (2.3-11) und (2.3-37)
$\sigma^2, \sigma_k^2, \sigma_\infty^2, \hat{\sigma}_k^2$	Varianz des Restsignals allgemein, zur Zeit k , für $k \rightarrow \infty$, Schätzung gemäß (5.4-2)
σ_a^2, σ_u^2	Varianz der Daten a_k , des nicht-kompensierbaren Signals u_k
$T(v)$	Funktion zur Beschreibung des Iterationsverfahrens der Restsignal-Varianzen gemäß (2.3-15)
t_i	Zeitkonstanten der Restfehler-Einlaufkurve gemäß (2.5-30)
ϑ	vom Leitungscode abhängiger Parameter gemäß Satz 2.3
$u_k, u_k^*, u_{\text{DFE},k}$	nicht-kompensierbarer Signalanteil in der Verstellinformation allgemein bzw. bei EC gemäß (5.1-2), bei EC gemäß (5.1-5), bei DFE gemäß (5.1-6)
\tilde{u}_k	$= -a_k u_k$, siehe (3.2-3)
\mathbf{U}	(L, L) -dim. Orthogonalmatrix der Eigenvektoren von \mathbf{F}
v, v_k, v_∞	$= \sigma^2$: Restsignal-Varianz allgemein, zur Zeit k , für $k \rightarrow \infty$

\mathbf{V}	(L, L) -dim. Orthogonalmatrix der Eigenvektoren von Φ_{aa}
w_i	Gewichtskonstanten der Restfehler-Einlaufkurve gemäß (2.5-30)
\mathbf{W}_k	(L, L) -dim. Matrix der 4. Momente gemäß (2.5-11)
$W(\sigma), W^*$	siehe (2.3-11) und (2.3-31)
W_{AD}, W_C, W_{CDFE}	Wortlänge des A/D-Wandlers, der EC-, DFE-Koeffizienten
x_k	Nutzsignal des fernen Teilnehmers in §5
$x_{Vor,k}, x_{Haupt,k}, x_{Nach,k}$	Zerlegung von x_k in Vor-, Haupt-, und Nachschwinger
y_k	kompensierbarer Signalanteil in der Verstellinformation bzw. in §5 Echosignal des nahen Teilnehmers
$\hat{y}_k, \hat{y}_{DFE,k}$	Kompensationssignal zur Zeit k allgemein bzw. bei EC, bei DFE
\mathbf{z}_k	L -dim. Vektor der Diagonalelemente der Matrix \mathbf{Z}_k
\mathbf{Z}_k	$= E(\tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_k^T) : (L, L)$ -dim. Matrix gemäß (2.5-5)
\mathcal{Z}	Menge der ganzen Zahlen
$\ \mathbf{a}\ $	euklidische Norm des Vektors \mathbf{a}
$\ T\ _I$	Norm der Funktion T bzgl. Intervall I gemäß (A.4-1)
\star	Faltungs-Operation
$\circ \rightarrow \bullet$	Fourier-Transformation
	Kennzeichnung einer bedingten Verteilung in Erwartungswerten, Streuungen, Verteilungsdichtefunktionen, charakteristischen Funktionen oder Wahrscheinlichkeiten
\sim	verteilt wie
\approx, \ll, \equiv	näherungsweise, wesentlich kleiner, identisch gleich

Kapitel 1

Einführung

1.1 Aufgabenstellung und Ziele der Arbeit

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit adaptiven Filtern, die wichtige Systembausteine in digitalen Empfängern für die Datenübertragung sind. Bekannte Beispiele für derartige Filter sind adaptive Entzerrer oder bei der Vollduplex-Übertragung adaptive Echolöcher.

Wichtige Kriterien für die Dimensionierung digitaler Empfänger sind der Realisierungsaufwand und die Übertragungsgüte, die üblicherweise mit der Fehlerwahrscheinlichkeit erfaßt wird. Für die adaptiven Filter bedeutet das, daß der Zusammenhang zwischen dem Realisierungsaufwand und den Auswirkungen auf die Fehlerwahrscheinlichkeit möglichst genau bekannt sein sollte.

Der Realisierungsaufwand bei adaptiven Filtern wird im wesentlichen durch den Adaptionsalgorithmus, durch die notwendige Filterlänge und durch die notwendige Genauigkeit bei der Darstellung der adaptiv einstellbaren Filterkoeffizienten bestimmt. Dieser letzte Punkt bedeutet, daß das variable Filter als numerisches wertdiskretes Filter mit einem ebenfalls wertdiskreten Adaptionsalgorithmus betrachtet werden muß.

Mit dem Realisierungsaufwand für das Filter wird direkt die Genauigkeit der Filtereinstellung bestimmt. Durch eine ungenaue Einstellung der Filterkoeffizienten verschlechtert sich die Fehlerwahrscheinlichkeit des digitalen Empfängers. Für ihre genaue Berechnung sind aber noch viele andere Einflüsse zu berücksichtigen wie beispielsweise weitere Eigengeräusche des Empfängers sowie die Leitungstörungen.

Daraus ergibt sich das Vorgehen für diese Arbeit : Im ersten theoretischen Teil wird eine allgemeine geschlossene Theorie wertdiskreter adaptiver Filter entwickelt. Schwerpunkte sind dabei die Auswahl eines möglichst aufwandsgünstigen Adaptionsverfahrens.

rens, die Erfassung der Adaptionsgeschwindigkeit, die Analyse des Restfehlers im eingeschwungenen Zustand sowie die Berücksichtigung von typischen Implementierungseffekten.

Im zweiten anwendungsorientierten Teil wird konkret an speziellen Empfängern demonstriert, wie die Auswirkungen der adaptiven Filter auf die Übertragungsgüte berechnet werden können. Besondere Berücksichtigung finden dabei auch die A/D-Wandler als weitere Quellen von Quantisierungsgeräuschen.

1.2 Stand der Technik

Von einigen Ansätzen abgesehen, gibt es bisher keine umfassende analytische Theorie wertdiskreter Adaptionsverfahren. Der Entwurf und die Dimensionierung adaptiver Filter haben sich bisher stützen müssen auf “behelfsmäßige” Methoden wie :

- Hardware-Experimente. Diese sind jedoch offensichtlich noch aufwendiger und unflexibler als die
- Simulation auf dem Rechner. Zwar muß man hier in aller Regel auf die Simulation in Echtzeit verzichten, was jedoch für manche Fragestellungen nicht wesentlich ist. Entscheidend sind aber die Genauigkeits- und Rechenzeit-Probleme: Um beispielsweise eine Fehlerwahrscheinlichkeit von 10^{-8} durch die einfache Auszählmethode zu ermitteln, ist eine untragbar lange Simulationszeit erforderlich. Darüberhinaus kann eine Simulation die Ergebnisse nur summarisch auflisten ohne tiefere Einblicke in die Zusammenhänge zu erlauben. Optimierungen von Quantisierungskennlinien beispielsweise sind wegen der Schwerfälligkeit der Simulation beinahe unmöglich. Außerdem ist es schwierig, einzelne Effekte isoliert zu analysieren.

Diese Methoden sind also kein vollwertiger Ersatz für eine Theorie – jedoch können Simulationsrechnungen und Hardware-Experimente dazu dienen, theoretische Überlegungen zu kontrollieren und zu verifizieren.

Der Entwurf einer Theorie wertdiskreter Adaptionsverfahren kann ausgehen von den beiden folgenden, bereits ausführlich untersuchten Situationen :

- Filter mit festen quantisierten Koeffizienten : Die wohlbekannteste Theorie für diesen Fall ist auf Filter mit adaptiven quantisierten Koeffizienten nicht anwendbar und somit für diese Arbeit völlig irrelevant; beispielsweise erfordert die Darstellung der Koeffizienten in adaptiven Filtern wesentlich mehr Bits als bei Filtern mit festen Koeffizienten.
- Filter mit variablen unquantisierten Koeffizienten : Für diesen Fall gibt es inzwischen schon eine umfangreiche und ausgedehnte Theorie [1.1] – [1.7], die sich

aber fast ausschließlich auf Filter mit wertkontinuierlichen Koeffizienten (d.h. mit unendlicher Wortlänge) beschränkt, weil dann alle Rechnungen und Analysen in den gewohnten reellen Zahlen ablaufen können – wogegen die durch Festkomma-Arithmetik implizierte algebraische Grundstruktur doch wesentlich komplizierter ist.

Eine sinnvolle Ausgangsbasis für die Untersuchungen in dieser Arbeit stellt die Theorie wertkontinuierlicher Adaptionsverfahren dennoch dar, obwohl einige prinzipielle Unterschiede nochmals zeigen, daß sie der wertdiskreten Situation nicht gerecht werden kann :

- In Sonderfällen reagieren wertdiskrete adaptive Filter wesentlich anders als im unquantisierten Fall – die Erklärung dieser überraschenden Effekte gelingt dann nur mit einem theoretischen Verständnis wertdiskreter Adaptionsverfahren.
- Die bekannte Theorie adaptiver Filter beschränkt sich auf die Analyse der Momente 2.Ordnung, obwohl für die Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit auch eine exakte Kenntnis der Verteilungen erforderlich ist.

1.3 Besondere Merkmale

Diese Arbeit beschränkt sich auf :

- Adaptive FIR-Filter (FIR = finite impulse response), die als Kompensationsfilter eingesetzt werden. Damit werden beispielsweise entscheidungsrückgekoppelte Entzerrer (DFE = decision feedback equalizer) und Echolöcher (EC = echo canceler) erfaßt. In der Literatur werden anstelle des Ausdrucks Kompensationsfilter auch die Begriffe Systemidentifikation [1.4] und Signalschätzung [6.2] verwendet.
- Gradientenverfahren in der einfachsten Form (stochastic gradient algorithms als spezielle least-mean-squares algorithms). Nicht betrachtet werden Kalman-Adaptionsverfahren oder orthogonale Einstellverfahren.

Um eine möglichst einfache Formulierung zu erreichen, erfolgen alle Darstellungen im Reellen. Die Übertragung auf komplexe Filter bereitet aber keine besonderen Schwierigkeiten.

Bei den hier betrachteten Empfängern und Filtern bringt eine Realisierung in Gleitkomma-Arithmetik eher Nachteile als Vorteile gegenüber der zudem noch wesentlich aufwandsgünstigeren Festkomma-Arithmetik. Durch die hier verwendeten Methoden ist es möglich, die Untersuchungen ohne Belastungen durch Details der Zahlendarstellung auszuführen, da nur die Parameter Wortlänge und Quantisierungsschrittweite sowie der Typ der Quantisierungskennlinie eingehen.

1.4 Beispiele für Kompensationsfilter

In diesem Abschnitt wird die Situation beim Einsatz eines Kompensationsfilters anhand der beiden Beispiele Echolöschung (EC, Bild 1.1) und Entzerrung mit Entscheidungsrückkopplung (DFE, Bild 1.2) erläutert.

1.4.1 Kompensationsfilter beim Einsatz als EC

Bild 1.1 zeigt das Echokompensationsprinzip bei einer Fernsprechverbindung. Ein Fernsprechteilnehmer (naher Teilnehmer) ist über eine 2-Draht-Leitung an die Ortsvermittlung (ferner Teilnehmer) angeschlossen. Im Vollduplexbetrieb wird auf der Leitung gleichzeitig in beide Richtungen übertragen. Zur näherungsweisen Richtungstrennung dienen Gabeln auf beiden Seiten. Die Datenfolge a_k , also das Sendesignal des nahen Teilnehmers, wird zu dem fernen Teilnehmer übertragen. Dieser sendet gleichzeitig eine ferne Datenfolge, die beim nahen Teilnehmer nach der Gabel als Nutzsignal u_k erscheint.

Infolge nichtidealer Kabelnachbildung in der Gabel sowie Reflexionen auf der Leitung verursacht die nahe Datenfolge a_k das Auftreten von Echos nach der Gabel, die den Empfang des Nutzsignals überlagernd stören. Das Echosignal y_k entsteht aus den a_k im Echopfad (auch unbekanntes System genannt).

Für eine zuverlässige Erkennung der fernen Datenfolge muß das Empfangssignal $u_k + y_k$ vom Echosignal y_k weitgehend befreit werden. Dazu wird für y_k im Echolöcher eine möglichst genaue Schätzung \hat{y}_k nachgebildet, die als Echokompensationssignal bezeichnet wird. Um ein möglichst kleines Restsignal $y_k - \hat{y}_k$ zu erreichen, muß der Echolöcher durch ein Adaptionsverfahren den unbekanntes und eventuell zeitvarianten Echopfad sehr genau identifizieren.

Für das Adaptionsverfahren wird das Signal $u_k + y_k - \hat{y}_k$ nach der Kompensationsstelle als Verstellinformation verwendet. Die Einstellung des variablen Filters ist um so einfacher, je weniger $y_k - \hat{y}_k$ durch u_k überlagert wird. Für das Adaptionsverfahren wirkt das Nutzsignal also störend. Für die nachfolgende Analyse der Adaption wird festgestellt, daß u_k und a_k als statistisch unabhängig angenommen werden können.

Typischerweise sind die Größenverhältnisse der Signale wie folgt : Das Echosignal y_k liegt ca. 30 dB über dem Nutzsignal u_k , d.h. im Empfangssignal dominiert das Echo. Das Restsignal $y_k - \hat{y}_k$ soll jedoch 20 bis 40 dB unter dem Nutzsignal liegen. Die Echodämpfung muß also den erheblichen Wert von ca. 60 dB erreichen. Dies ist um so schwieriger, weil in der Verstellinformation $u_k + y_k - \hat{y}_k$ die eigentliche Information über die Genauigkeit der aktuellen Filtereinstellung durch u_k fast völlig überdeckt wird.

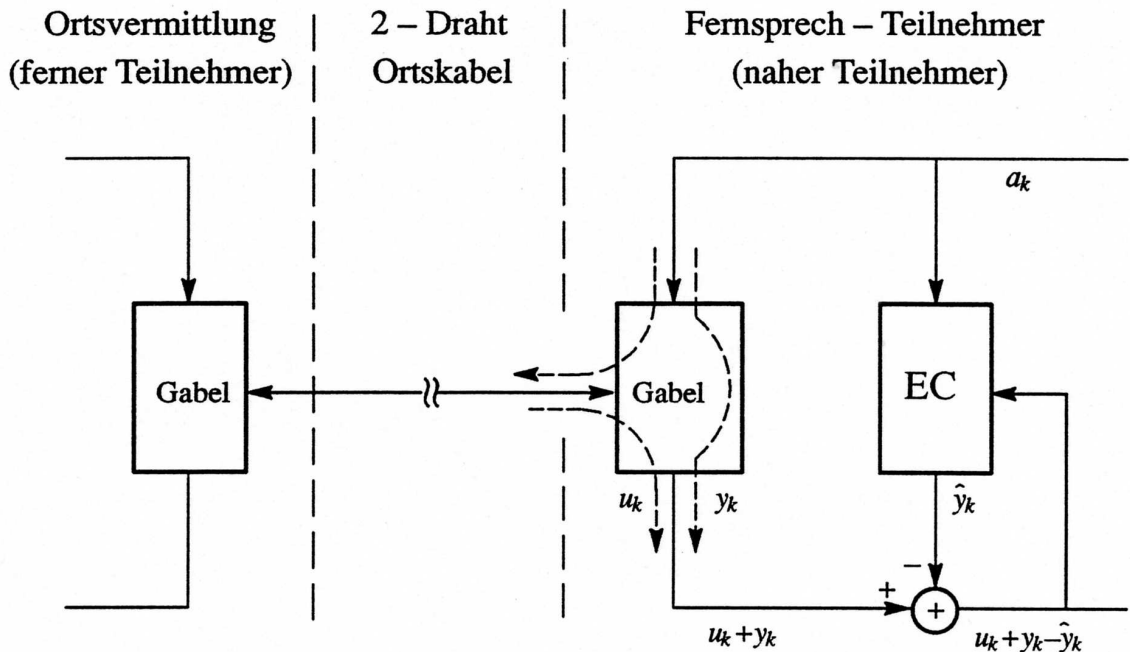


Bild 1.1: Echokompensations-Prinzip bei einer Fernsprechverbindung

Über dieses Beispiel hinaus besteht auch im allgemeinen Fall das Signal nach der Kompensationsstelle bzw. die Verstellsinformation aus den beiden Komponenten u_k und $y_k - \hat{y}_k$. Dabei ist y_k das kompensierbare Signal und \hat{y}_k das Kompensationssignal und u_k das nicht-kompensierbare Signal.

1.4.2 Kompensationsfilter beim Einsatz als DFE

In Bild 1.2 wird der Einsatz eines Kompensationsfilters zur Entzerrung der Nachschwinger eines verzerrten Signals dargestellt.

In einem Kanal mit Interferenz-Verzerrungen entsteht aus der Datenfolge b_k das verzerrte Signal x_k . In der Impulsantwort des verzerrenden Kanals wird ein Hauptschwinger festgelegt (mit der Verzögerung v ; das ist aber nicht immer eindeutig, was hier jedoch nicht weiter interessiert) und somit wird eine Zerlegung in Vor-, Haupt- und Nachschwinger-Anteil der Impulsantwort gegeben. Dies impliziert eine entsprechende Zerlegung des verzerrten Signals: $x_k = x_{\text{Vor},k} + x_{\text{Haupt},k} + x_{\text{Nach},k}$. Bei entsprechender Normierung der Impulsantwort ist dann $x_{\text{Haupt},k}$ die um v Takte verzögerte Datenfolge: $x_{\text{Haupt},k} = b_{k-v}$.

Wenn nun im Eingangssignal des Entscheiders der Hauptschwinger-Anteil $x_{\text{Haupt},k}$ dominiert, so kann mit vernachlässigbarer Fehlerwahrscheinlichkeit die Datenfolge

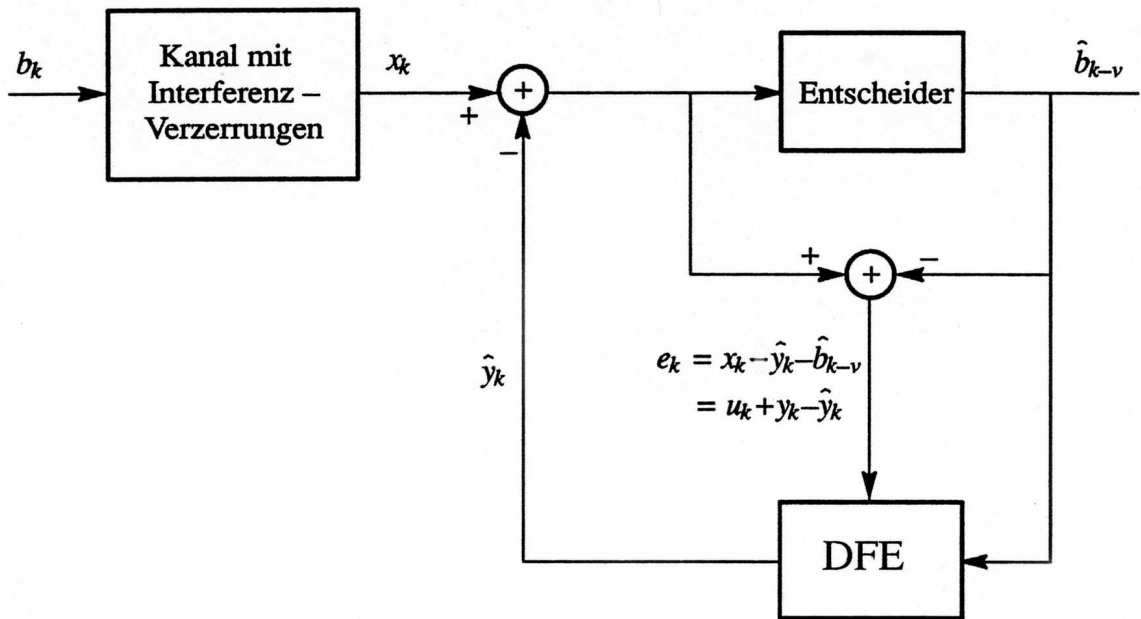


Bild 1.2: Entzerrung durch Kompensation der Nachschwinger

durch einen einfachen gedächtnislosen Entscheider verzögert wiedergewonnen werden : $\hat{b}_{k-v} = x_{\text{Haupt},k} = b_{k-v}$.

Damit steht nun ein Signal zur Verfügung, mit dem im DFE eine Schätzung \hat{y}_k für $y_k = x_{\text{Nach},k}$ gebildet werden kann. Das zu identifizierende und nachzubildende unbekannte System ist hier also der Nachschwinger-Anteil der Impulsantwort und der zugehörige Anteil von x_k ist das kompensierbare Signal.

Für das Adaptionsverfahren wird der Entscheiderfehler e_k (= Differenz zwischen Entscheider-Eingang und -Ausgang) als Verstellinformation verwendet. Mit der Darstellung

$$e_k = x_k - \hat{y}_k - \hat{b}_{k-v} = \underbrace{x_{\text{Vor},k}}_{= u_k} + \underbrace{x_{\text{Haupt},k} - \hat{b}_{k-v}}_{= 0} + \underbrace{x_{\text{Nach},k} - \hat{y}_k}_{= y_k - \hat{y}_k} = u_k + y_k - \hat{y}_k$$

erweist sich der Vorschwinger-Anteil $x_{\text{Vor},k}$ des verzerrten Signals als das nicht-kompensierbare Signal u_k .

Die Größenverhältnisse der Signale sind hier wesentlich durch die Form der Impulsantwort des verzerrenden Kanals bestimmt. In aller Regel sind die Verhältnisse aber unkritischer als bei der EC-Anwendung. Die für die Analyse der Adaption vorauszusetzende Unabhängigkeit der Signale u_k und b_{k-v} ist bei unkorrelierter Datenfolge exakt und bei korrelierter Datenfolge zumindest näherungsweise erfüllt.

Kapitel 2

Die Berechnung von Restfehler und Konvergenzgeschwindigkeit

Die prinzipielle Funktionsweise eines adaptiven Kompensationsfilters ist im wertkontinuierlichen Fall relativ einfach – zumindest dann, wenn die Adaption mit dem normalen Gradientenverfahren erfolgt und alle sonstigen Randbedingungen als ideal angenommen werden können. Mit der grundlegenden Arbeit von Mazo [3.8] können die Untersuchungen für diese Situation inzwischen als abgeschlossen angesehen werden. Momentan aber noch voll in Bewegung ist die Entwicklung von komplizierteren Adaptionsverfahren, die im wesentlichen eine Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit für instationäre Kanäle (z.B. Mobilfunk oder Richtfunk) und/oder instationäre Datensignale (z.B. Sprache) zum Ziel haben.

Wesentlich schwieriger als im wertkontinuierlichen Fall ist die theoretische Analyse der wertdiskreten Adaptionsverfahren und hierzu sind bisher auch vergleichsweise wenige Veröffentlichungen erschienen. Selbst für die einfachen Gradienten-Adaptionsverfahren sind Ergebnisse bisher nur für einige Spezialfälle bekannt geworden. Das Hauptziel dieser Arbeit ist nun eine geschlossene Analyse wertdiskreter adaptiver Filter.

Die wichtigsten Parameter für die Dimensionierung sind dabei die Größe des Restfehlers und die Adaptionsgeschwindigkeit. Sowohl für die Berechnung dieser beiden Parameter wie für die Auswirkungen adaptiver Filter auf die Fehlerwahrscheinlichkeit in digitalen Empfängern ist neben der Streuung des Restsignals auch die Kenntnis seiner Verteilung erforderlich. Diese Restsignal-Verteilung wird anschließend in Kapitel 3 berechnet.

Das Prinzip des Kompensationsfilters wird zunächst in Abschnitt 2.1 für den allgemeinen Fall formuliert und anschließend wird in Abschnitt 2.2 die einfache und wohlbekanntere Herleitung der Ergebnisse für den wertkontinuierlichen Fall (vollständiges

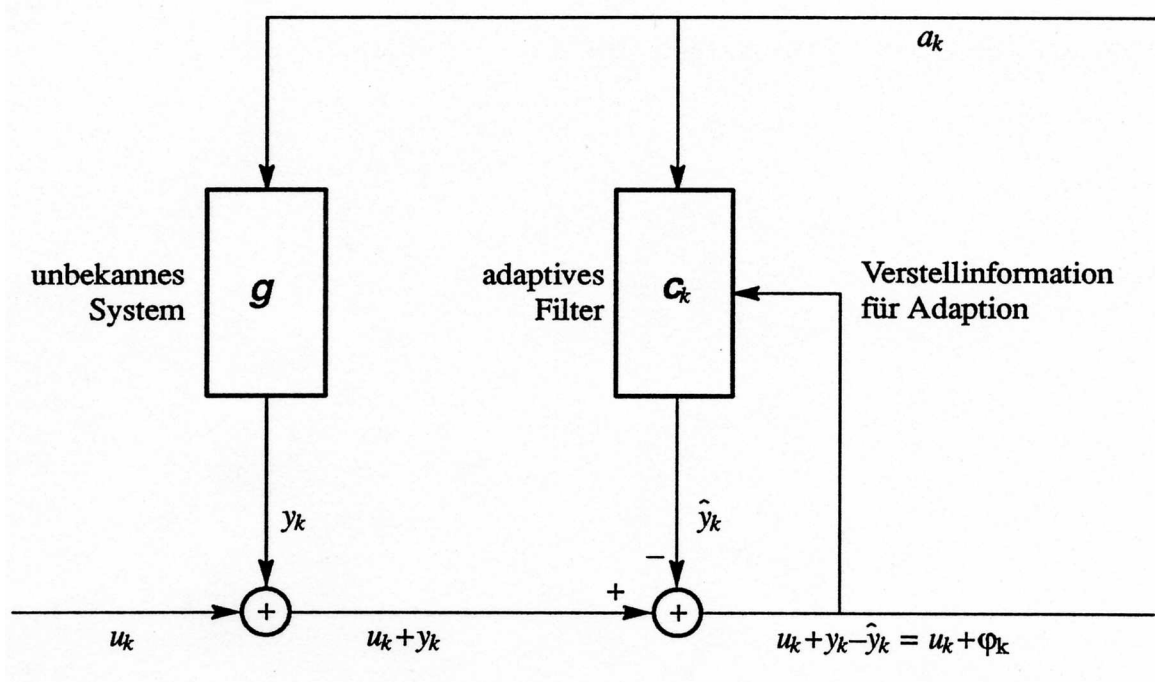


Bild 2.1: Prinzip des Kompensationsfilters

Gradientenverfahren, Abk. K-Adaption) kurz zusammengefaßt.

Die aufwendigere Analyse des wertdiskreten Falls erfolgt in Abschnitt 2.3 zunächst für eine allgemeine Quantisierungskennlinie der Verstellinformation (Abk. Q-Adaption) und anschließend erfolgt in Abschnitt 2.4 die Spezialisierung auf die Vorzeichen-Auswertung der Verstellinformation (Sign-Gradientenverfahren, Abk. S-Adaption).

In Abschnitt 2.5 wird schließlich auf die Voraussetzung unkorrelierter Leitungscodes verzichtet, die bei manchen wichtigen Anwendungen nicht gegeben ist. Dabei wird neben dem wertdiskreten auch der wertkontinuierliche Fall ausführlich behandelt.

2.1 Prinzip des Kompensationsfilters

Nach den Beispielen aus Abschnitt 1.4 erfolgt nun eine formale Beschreibung des Kompensationsfilters. In Bild 2.1 ist die allgemeine Situation dargestellt.

Es wird ein Signal $u_k + y_k$ beobachtet, das sich aus den beiden unbekanntem Anteilen u_k und y_k zusammensetzt. Das Ziel ist die Eliminierung von y_k . Dazu wird in einem Kompensationsfilter eine Schätzung \hat{y}_k (*Kompensationssignal*) für y_k berechnet. Das Signal $u_k + y_k - \hat{y}_k$ nach der *Kompensationsstelle* besteht dann im Idealfall aus dem dominierenden Signal u_k und einem sehr kleinen *Restsignal* $\varphi_k := y_k - \hat{y}_k$.

Naheliegenderweise werden für die beiden Anteile des *beobachtbaren Signals* $u_k + y_k$ folgende Bezeichnungen vereinbart : u_k wird *nicht-kompensierbares Signal* und y_k wird *kompensierbares Signal* genannt.

Vorausgesetzt wird, daß y_k das Ausgangssignal eines unbekanntem linearen Systems ist, dessen Eingangssignal eine bekannte Datenfolge a_k ist, die somit auch für das Kompensationsfilter zur Verfügung steht.

Diese Datenfolge a_k wird zu festen äquidistanten Zeitpunkten kT gesendet. Sämtliche in dieser Arbeit behandelten Signale und Systeme werden zeitdiskret in dem durch a_k gegebenen Takt betrachtet. Dazu wird durchgehend die Indizierung mit k verwendet.

Generelle Voraussetzungen :

- a_k und u_k sind jeweils stationäre mittelwertfreie stochastische Prozesse (mit den Varianzen $\sigma_a^2 = E\{a_k^2\}$ und $\sigma_u^2 = E\{u_k^2\}$) (2.1-1)

- a_k und u_k sind voneinander statistisch unabhängige stochastische Prozesse (2.1-2)

Die erste Voraussetzung kann teilweise abgeschwächt werden, was im Einzelnen aber nicht immer vermerkt wird. Die zweite Voraussetzung wird noch kommentiert.

Das unbekanntem lineare System wird approximativ durch die Impulsantwort endlicher Länge

$$\mathbf{g} = (g_0, g_1, \dots, g_{L-1})^T \quad (= \mathbf{c}_{\text{opt}}, \quad \text{s.u.}) \quad (2.1-3)$$

gekennzeichnet. Für das Ausgangssignal (kompensierbares Signal) gilt damit :

$$y_k = \sum_{i=0}^{L-1} g_i a_{k-i} = \mathbf{a}_k^T \mathbf{g} \quad (2.1-4)$$

Dabei wurde

$$\mathbf{a}_k = (a_k, a_{k-1}, \dots, a_{k-L+1})^T \quad (2.1-5)$$

gesetzt, um eine Darstellung als Skalarprodukt zu ermöglichen. Vektoren werden generell als Spaltenvektoren aufgefaßt.

Das durch \mathbf{g} beschriebene unbekanntem System soll mit einem adaptiven Transversalfilter nachgebildet werden. Dieses Filter ist durch den Koeffizienten-Vektor

$$\mathbf{c}_k = (c_{k,0}, \dots, c_{k,L-1})^T \quad (2.1-6)$$

gekennzeichnet und für das Ausgangssignal \hat{y}_k (Kompensationssignal) des Kompensationsfilters gilt dann :

$$\hat{y}_k = \mathbf{a}_k^T \mathbf{c}_k \quad (2.1-7)$$

Der Index k bei \mathbf{c} bedeutet, daß sich die Koeffizienten des adaptiven Filters in jedem Takt ändern können. Offensichtlich ist es für $y_k = \hat{y}_k$ hinreichend wie notwendig, daß $\mathbf{c}_k = \mathbf{g}$ gilt. Also ist \mathbf{g} der optimale Koeffizientensatz und deshalb wird für \mathbf{g} auch \mathbf{c}_{opt} geschrieben.

Eine übersichtliche Entwicklung der Theorie verlangt (wie vorangehend schon vorausgesetzt wurde), daß das adaptive Filter die gleiche Länge wie der Vektor \mathbf{g} hat. In der Praxis ist man natürlich aus Aufwandsgründen bestrebt, das adaptive Filter möglichst kurz zu machen. Diese Verkürzung darf allerdings nur so weit gehen, daß die dann nicht mehr kompensierbaren Komponenten aus \mathbf{g} vernachlässigbar klein gegenüber u_k sind.

Spezielle Voraussetzung für §2.2 bis §2.4 :

Die Sendewerte a_k sind untereinander unkorreliert (2.1-8)

Die (L, L) -dim. Autokorrelationsmatrix Φ_{aa} der Sendefolge ist stets symmetrisch, hat Toeplitz-Struktur und ist positiv definit. Es gilt :

$$\Phi_{aa} = E\{\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T\} \quad \text{ist unabhängig von } k \text{ wegen (2.1-1)} \quad (2.1-9)$$

Mit (2.1-8) gilt speziell (\mathbf{E} ist die (L, L) -dim. Einheitsmatrix) :

$$\Phi_{aa} = \sigma_a^2 \cdot \mathbf{E} \quad (2.1-10)$$

Vermerkt wird die Beziehung :

$$E\{\|\mathbf{a}_k\|^2\} = E\{\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k\} = E\{\text{Spur}(\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T)\} = \text{Spur}(\Phi_{aa}) = L\sigma_a^2 \quad (2.1-11)$$

Beim Binärcode gilt (2.1-11) auch ohne die Erwartungswert-Bildung : $\|\mathbf{a}_k\|^2 = L\sigma_a^2$. Es werden weitere wichtige Bezeichnungen notiert :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k := \mathbf{c}_{\text{opt}} - \mathbf{c}_k \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} L - \text{dim. Vektor der aktuellen} \\ \text{Koeffizienten-Fehleinstellung} \end{array} \right. \quad (2.1-12)$$

$$\varphi_k := y_k - \hat{y}_k = \mathbf{a}_k^T \mathbf{c}_{\text{opt}} - \mathbf{a}_k^T \mathbf{c}_k = \mathbf{a}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad : \quad \text{Restsignal} \quad (2.1-13)$$

Bei gegebener Koeffizienten-Fehleinstellung bzw. festgehaltenem Koeffizienten-Vektor gilt $E\{\varphi_k \mid \boldsymbol{\varepsilon}_k\} = 0$ wegen $E\{a_k\} = 0$. Somit berechnet sich die Varianz des

Restsignals direkt aus dem Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}_k$:

$$\begin{aligned} D^2\{\varphi_k \mid \boldsymbol{\varepsilon}_k\} &= E\{(\mathbf{a}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k)^2 \mid \boldsymbol{\varepsilon}_k\} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k \mid \boldsymbol{\varepsilon}_k\} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\Phi}_{aa} \boldsymbol{\varepsilon}_k \end{aligned} \quad (2.1-14a)$$

$$= \sigma_a^2 \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}_k\|^2 \quad \text{mit (2.1-10)} \quad (2.1-14b)$$

(Die Schreibweise mit den bedingten Erwartungswerten bedeutet, daß sich der Erwartungswert nur auf \mathbf{a}_k bezieht und deshalb eine Funktion von $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ ist.)

2.2 Wertkontinuierliche Adaption (K-Adaption)

2.2.1 Prinzip des stochastischen Gradientenverfahrens

Das angestrebte Ziel $y_k = \hat{y}_k$ kann mit dem Signal $u_k + (y_k - \hat{y}_k) = u_k + \varphi_k$ nach der Kompensationsstelle formuliert werden : Die mit der Fehlerfunktion F beschriebene Varianz dieses Signals soll durch geeignete Wahl des Koeffizienten-Vektors \mathbf{c}_k minimiert werden :

$$\begin{aligned} F(\mathbf{c}_k) &= E\{(u_k + \varphi_k)^2 \mid \mathbf{c}_k\} \\ &= E\{u_k^2\} + E\{\varphi_k^2 \mid \mathbf{c}_k\} \quad \text{da } E\{u_k \varphi_k \mid \mathbf{c}_k\} = 0 \\ &= \sigma_u^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\Phi}_{aa} \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad \text{wegen (2.1-14a)} \\ &= \sigma_u^2 + \sigma_a^2 \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}_k\|^2 \quad \longrightarrow \quad \text{Min} \end{aligned} \quad (2.2-1)$$

Auch ohne die Voraussetzung (2.1-8) ist die optimale Koeffizienten-Einstellung stets durch $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{c}_{\text{opt}} - \mathbf{c}_k = \mathbf{0}$ beschrieben, weil die Autokorrelationsmatrix $\boldsymbol{\Phi}_{aa}$ stets positiv definit ist. Es gilt also :

$$F_{\min} := \min_{\mathbf{c}} F(\mathbf{c}) = F(\mathbf{c}_{\text{opt}}) = E\{u_k^2\} = \sigma_u^2 \quad (2.2-2)$$

Zur Minimierung der Fehlerfunktion F und damit zur Bestimmung von \mathbf{c}_{opt} wird ein Vektor-Iterationsverfahren verwendet, dessen einfachste Form das wohlbekannte Gradientenverfahren ist [1.1] – [1.7] :

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k - \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F(\mathbf{c}_k)}{\partial \mathbf{c}_k} \quad (2.2-3)$$

Dabei ist α die positive Verstellsgröße. Die Subtraktion des mit α bewerteten Gradienten vom alten Koeffizienten-Vektor ergibt den neuen Koeffizienten-Vektor. Unter Beachtung von $\partial\varphi_k/\partial\mathbf{c}_k = -\partial(\mathbf{a}_k^T \mathbf{c}_k)/\partial\mathbf{c}_k = -\mathbf{a}_k$ (Spaltenvektor) ergeben sich durch Differentiation von (2.2-1) für den Gradienten folgende Darstellungen :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{c}_k}(\mathbf{c}_k) &= E\left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{c}_k} \cdot (u_k + \varphi_k) \mid \mathbf{c}_k \right\} \\ &= -E\{ \mathbf{a}_k \cdot (u_k + \varphi_k) \mid \mathbf{c}_k \} \end{aligned} \quad (2.2-4)$$

$$= -\bar{\Phi}_{aa} \boldsymbol{\varepsilon}_k = -\sigma_a^2 \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (2.2-5)$$

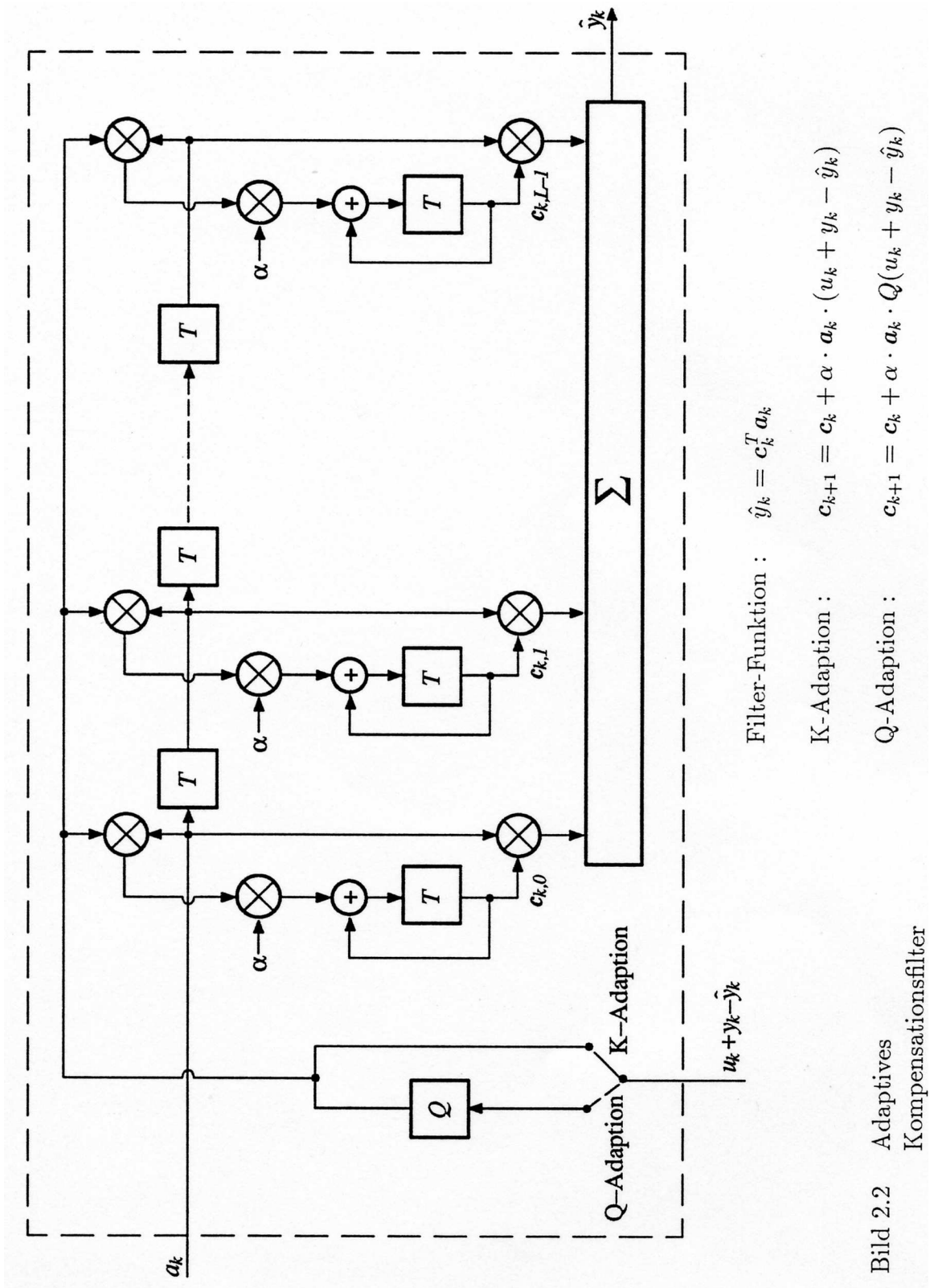
Die Berechnung des Gradienten mit (2.2-4) erfordert also eine Erwartungswert-Bildung. Praktisch gelingt aber nur eine Schätzung des Erwartungswertes durch eine Mittelwert-Bildung. Dieses Verfahren ist jedoch aufwendig und ermöglicht auch keine taktweise Änderung des Koeffizienten-Vektors, wie es die Indizierung in (2.2-3) angibt. Deshalb wird $-\mathbf{a}_k(u_k + \varphi_k)$ direkt als Schätzung des Gradienten verwendet. Allerdings ist diese Schätzung immer (also auch bei $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{0}$) mit einer großen Leistung behaftet :

$$\begin{aligned} E\{ \|\mathbf{a}_k(u_k + \varphi_k)\|^2 \mid \boldsymbol{\varepsilon}_k \} &= E\{ \|\mathbf{a}_k\|^2 (u_k^2 + 2u_k\varphi_k + \varphi_k^2) \mid \boldsymbol{\varepsilon}_k \} \\ &= E\{ \|\mathbf{a}_k\|^2 u_k^2 \mid \boldsymbol{\varepsilon}_k \} + E\{ \|\mathbf{a}_k\|^2 \varphi_k^2 \mid \boldsymbol{\varepsilon}_k \} \\ &\geq E\{ \|\mathbf{a}_k\|^2 u_k^2 \} = L\sigma_a^2 \sigma_u^2 \end{aligned} \quad (2.2-6)$$

Das stochastische Gradientenverfahren zu (2.2-3) lautet – wieder als L -dimensionales Iterationsverfahren geschrieben – nun so ($\alpha > 0$) :

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \alpha \cdot \mathbf{a}_k(u_k + \varphi_k) \quad (2.2-7)$$

Dieses Verfahren wird zuweilen auch als LMS (least mean squares)-Algorithmus bezeichnet, während der Name stochastisches Gradientenverfahren dann den Verfahren mit variabler Verstellsgröße vorbehalten bleibt. Ein derartiges Verfahren mit sinkendem α kann zur Konvergenzbeschleunigung eingesetzt werden – allerdings wird das mit stark erhöhtem Realisierungsaufwand erkauft. Hier wird α weiterhin als konstant vorausgesetzt.



Das Verfahren (2.2-7) ist in Bild 2.2 dargestellt : Das Signal $u_k + \varphi_k$ wird mit den Werten a_k im Schieberegister multipliziert. Würde man die Multiplikationsergebnisse zeitlich mitteln, so wäre nach (2.2-5) das Ergebnis die Abweichung der aktuellen Koeffizienten von den optimalen Koeffizienten (wenn man Ergodizität voraussetzt). Die Addition dieser mit einem Faktor kleiner als $1/\sigma_a^2$ gewichteten aktuellen Abweichung zu den aktuellen Koeffizienten führt dann in Richtung der optimalen Koeffizienten. Anstelle der Mittelung werden beim stochastischen Gradientenverfahren die Multiplikationsergebnisse mit einem sehr kleinen Faktor α bewertet und sofort in jedem Schritt auf die jeweils aktuellen Koeffizienten aufaddiert. Damit wird die Mittelung de facto in die Koeffizienten selbst hineinverlagert.

Wenn die Koeffizienten ideal eingestellt sind, so ist die Verstellsinformation im Mittel Null. Dennoch werden in jedem Schritt die Koeffizienten wieder verändert — dies folgt sowohl aus der stochastischen Betrachtung in (2.2-6) wie auch direkt aus (2.2-7), da $u_k \neq 0$ ist. Somit ist eine feste Stabilisierung auf die idealen Werte nicht möglich. Die Koeffizienten zittern (schwanken) auch im eingeschwungenen (“fertig” adaptierten) Zustand ständig um die Optimalwerte herum (auch als “Dithering”-Effekt in der englischsprachigen Literatur bekannt). Die Größe der Schwankung wird mit der Varianz bzw. Leistung des Restsignals oder auch mit dem Leistungsverhältnis vom Restsignal zum nicht-kompensierbaren Signal erfaßt :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k^2 = D^2\{\varphi_k\} = E\{\varphi_k^2\} & : \text{ Restsignal-Varianz} \\ R_k^2 = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_u^2} & : \text{ Leistungsverhältnis } \varphi_k \text{ zu } u_k \end{aligned} \right\} \quad (2.2-8)$$

Hierbei wurde $E\{\varphi_k\} = 0$ ausgenutzt, was in (2.2-15) noch gezeigt wird. Der nachfolgende Grenzwert ist natürlich nur definiert, wenn das Adaptionverfahren konvergiert :

$$\sigma_\infty^2 := \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 \quad : \quad \text{Restfehler} \quad (2.2-9)$$

Der Restfehler wird auch als mean squared excess error bezeichnet. Nach (2.2-1) und (2.2-2) gilt :

$$E\{\lim_k F(\mathbf{c}_k)\} = F(\mathbf{c}_{\text{opt}}) + \lim_{k \rightarrow \infty} E\{\varphi_k^2\} = \sigma_u^2 + \sigma_\infty^2 \quad (2.2-10)$$

Bei den meisten Anwendungen wird

$$R_\infty^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k^2 = \frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_u^2} \ll 1 \quad (2.2-11)$$

angestrebt. Offensichtlich ist der Restfehler stark von α abhängig – je kleiner α gewählt wird, desto kleiner wird σ_∞^2 . Allerdings bedeuten kleine Werte von α hohe Genauigkeitsanforderungen bei der Darstellung der Koeffizienten und zudem eine

sehr langsame Konvergenzgeschwindigkeit. Im nächsten Abschnitt 2.2.2 wird das für die K-Adaption genauer untersucht. Der gesamte restliche Teil von Kapitel 2 behandelt dann für die Q-Adaption die Berechnung des Restfehlers und der Konvergenzgeschwindigkeit in Abhängigkeit von α und der Quantisierung der Verstellsinformation.

2.2.2 Restfehler und Konvergenzgeschwindigkeit

Aus (2.2-7) ergibt sich mit (2.1-12) für den Vektor der Koeffizienten-Fehleinstellung eine stochastische Rekursion :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_k - \alpha \cdot \mathbf{a}_k(u_k + \varphi_k) \quad (2.2-12)$$

$$= (\mathbf{E} - \alpha \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T) \boldsymbol{\varepsilon}_k - \alpha \mathbf{a}_k u_k \quad (2.2-13)$$

Für die Analyse dieser stochastischen Rekursion wird üblicherweise die Gültigkeit des von Mazo [3.8] eingeführten Independence-Theorems (besser –Hypothese)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k \text{ und } \mathbf{a}_k \text{ sind statistisch unabhängig} \quad (2.2-14)$$

vorausgesetzt. In vielen Situationen ist das zwar nicht exakt richtig, so daß dann die (allerdings unübliche) Bezeichnung Independence-Hypothese eigentlich treffender wäre. Näherungsweise ist (2.2-14) jedoch sehr gut erfüllt, da bei kleinem α die in \mathbf{a}_k zusammengefaßten Werte kaum noch einen Einfluß auf die aktuelle Koeffizienten-Einstellung haben. (2.2-14) kann exakt erfüllt werden, wenn nur nach jeweils L Takten Koeffizienten-Verstellungen ausgeführt werden. Dazu ist ferner die Voraussetzung (2.1-8) notwendig. (2.2-14) wird jedoch in allen Veröffentlichungen zu adaptiven Filtern weithin akzeptiert und die damit gewonnenen Ergebnisse werden zudem durch Simulationsrechnungen immer wieder bestätigt.

Aus (2.2-14) folgt zunächst

$$E\{\varphi_k\} = E\{\mathbf{a}_k^T\} \cdot E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k\} = \mathbf{0}^T \cdot E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k\} = 0 \quad , \quad (2.2-15)$$

was in (2.2-8) schon benutzt wurde. Von (2.2-13) wird der Erwartungswert gebildet :

$$\begin{aligned} E\{\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}\} &= (\mathbf{E} - \alpha \boldsymbol{\Phi}_{aa}) \cdot E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k\} & (2.2-16) \\ &= (\mathbf{E} - \alpha \boldsymbol{\Phi}_{aa})^{k+1} \cdot E\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} \\ &= (1 - \alpha \sigma_a^2)^{k+1} \cdot E\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt :

$$\alpha < \frac{2}{\sigma_a^2} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k\} = \mathbf{0} \quad (2.2-17)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_k$ konvergiert also im Mittel gegen den Nullvektor, d.h. die Folge der \mathbf{c}_k beim stochastischen Gradientenverfahren bildet eine asymptotisch erwartungstreue Schätzung. Diese Aussage ist allerdings von geringem Wert, denn gleichzeitig könnte die Folge der Varianzen von $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ divergieren.

Das Independence-Theorem wird nun zur Berechnung von $\sigma_k^2 = D^2\{\varphi_k\}$ benutzt. Mit der Formel (A.2-3) für bedingte Erwartungswerte folgt :

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= E\{\varphi_k^2\} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k\} \\ &= E\{E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k \mid \boldsymbol{\varepsilon}_k\}\} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \cdot E\{\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T\} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k\} \\ &= E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\Phi}_{aa} \boldsymbol{\varepsilon}_k\} = \sigma_a^2 \cdot E\{\|\boldsymbol{\varepsilon}_k\|^2\} \end{aligned} \quad (2.2-18)$$

Von (2.2-12) wird die Norm gebildet :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}\|^2 = \|\boldsymbol{\varepsilon}_k\|^2 - 2\alpha\varphi_k(u_k + \varphi_k) + \alpha^2 \|\mathbf{a}_k\|^2 (u_k + \varphi_k)^2 \quad (2.2-19)$$

Unter Verwendung von (2.2-18), (2.1-2) und (2.1-13) folgt hieraus durch Erwartungswert-Bildung :

$$\frac{\sigma_{k+1}^2}{\sigma_a^2} = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_a^2} - 2\alpha\sigma_k^2 + \alpha^2 L\sigma_a^2\sigma_u^2 + \alpha^2 E\{\|\mathbf{a}_k\|^2 \varphi_k^2\} \quad (2.2-20)$$

Etwas schwieriger ist die exakte Bestimmung des verbleibenden Erwartungswertes. Mit der nachfolgend definierten Korrelationskonstanten ϱ (die eventuelle Abhängigkeit von k wird weiter unten erörtert)

$$\varrho = \frac{E\{\|\mathbf{a}_k\|^2 \cdot \varphi_k^2\}}{E\{\|\mathbf{a}_k\|^2\} \cdot E\{\varphi_k^2\}} = \frac{E\{\|\mathbf{a}_k\|^2 \cdot \varphi_k^2\}}{L\sigma_a^2 \cdot \sigma_k^2} \quad (2.2-21)$$

kann geschrieben werden :

$$E\{\|\mathbf{a}_k\|^2 \varphi_k^2\} = L\sigma_a^2\sigma_k^2\varrho \quad (2.2-22)$$

Beim Binärcode gilt $\|\mathbf{a}_k\|^2 = L\sigma_a^2$ auch ohne eine Erwartungswert-Bildung und somit $\varrho = 1$. Ansonsten liegt ϱ in der Größenordnung von 1, wie man per Simulation feststellen kann. Auch anschaulich besteht zwischen $\|\mathbf{a}_k\|^2$ und φ_k^2 nur eine schwache

Abhängigkeit. Genauer muß das nicht geklärt werden, da ϱ insgesamt nur eine untergeordnete Bedeutung hat und für realistisch kleine α -Werte sowieso ganz entfällt, wie sich noch zeigen wird.

Ungeachtet der geringen Bedeutung wird jetzt noch gezeigt, daß ϱ praktisch unabhängig von k ist und somit als Konstante angesehen werden kann. Dazu wird (siehe auch (A.1-10)) die auf Varianz 1 normalisierte Zufallsvariable $\varphi_{N,k}$ betrachtet :

$$\varphi_{N,k} := \frac{1}{D\{\varphi_k\}} \cdot \varphi_k \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_k = \sigma_k \cdot \varphi_{N,k} \quad , \quad D\{\varphi_{N,k}\} = 1 \quad (2.2-23)$$

Weiter wird wie in Kapitel 3 vorausgesetzt, daß die Verteilung von $\varphi_{N,k}$ für $k \rightarrow \infty$ gegen eine Grenzverteilung konvergiert, d.h. für ein hinreichend großes k_0 gilt :

$$\varphi_{N,k} \text{ hat für } k > k_0 \text{ eine von } k \text{ nahezu unabhängige Verteilung} \quad (2.2-24)$$

(Nebenbei bemerkt gilt diese Aussage bei Konvergenz der σ_k natürlich auch für φ_k – allerdings mit wesentlich größerem k_0). Die Voraussetzung (2.2-24) wird bei der Q-Adaption noch intensiv genutzt. Für die K-Adaption wird lediglich ausgenutzt, daß aus der Darstellung

$$\varrho = \frac{E\{\|\mathbf{a}_k\|^2 \cdot \varphi_{N,k}^2\}}{E\{\|\mathbf{a}_k\|^2\} \cdot E\{\varphi_{N,k}^2\}} = \frac{E\{\|\mathbf{a}_k\|^2 \cdot \varphi_{N,k}^2\}}{E\{\|\mathbf{a}_k\|^2\}} \quad (2.2-25)$$

sofort folgt, daß ϱ nahezu unabhängig von k für $k > k_0$ ist (denn der Erwartungswert in (2.2-25) ist nicht vom aktuellen Wert von $\varphi_{N,k}$, sondern nur von der Verteilung von $\varphi_{N,k}$ abhängig, und diese Verteilung ist eben konstant für $k > k_0$).

Aus (2.2-20) ergibt sich mit (2.2-22) nun eine Beschreibung des Iterationsverfahrens der Restsignal-Varianzen durch eine Gerade, d.h. durch zwei Konstanten A und B :

$$\sigma_{k+1}^2 = \underbrace{(1 - 2\alpha\sigma_a^2 + \alpha^2 L\sigma_a^4 \varrho)}_{=: A} \cdot \sigma_k^2 + \underbrace{\alpha^2 L\sigma_a^4 \sigma_u^2}_{=: B} \quad (2.2-26)$$

Die Konvergenz der Restsignal-Varianz erfordert gemäß Satz A.3 aus Anhang A.4 $|A| < 1$ (das ist allerdings auch sofort direkt einsehbar) und für den Restfehler gilt $\sigma_\infty^2 = A\sigma_\infty^2 + B$ bzw. $\sigma_\infty^2 = B/(1 - A)$:

$$\sigma_\infty^2 = \frac{\alpha L\sigma_a^2}{2 - \alpha L\sigma_a^2 \varrho} \cdot \sigma_u^2 \quad (2.2-27)$$

Aus $|A| < 1$ folgt für die maximal mögliche Verstellgröße :

$$\alpha < \alpha_{\max} = \frac{2}{L\sigma_a^2 \varrho} \quad (2.2-28)$$

Die Minimierung von $|A|$ ergibt die bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit optimale Verstellgröße :

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{L\sigma_a^2\varrho} \quad \Longrightarrow \quad \sigma_\infty^2(\alpha = \alpha_{\text{opt}}) = \frac{\sigma_u^2}{\varrho} \approx \sigma_u^2 \quad (2.2-29)$$

α_{max} ist kleiner als die entsprechende Grenze (2.2-17) für die Konvergenz der Erwartungswerte. Der noch kleinere Wert für α_{opt} führt jedoch zu einem Restfehler, der gemäß (2.2-11) immer noch viel zu groß ist. In der Praxis muß α noch wesentlich kleiner gewählt werden ($\alpha L\sigma_a^2\varrho \ll 1$) und damit entfällt der Einfluß von ϱ in (2.2-27) :

$$\sigma_\infty^2 = \frac{\alpha L\sigma_a^2}{2} \cdot \sigma_u^2 \quad \Longleftrightarrow \quad R_\infty^2 = \frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_u^2} = \frac{\alpha L\sigma_a^2}{2} \quad (2.2-30)$$

(2.2-30) ist die wichtigste Formel der K-Adaption (bei unkorrelierten Leitungscodes). Bemerkenswert ist, daß der Restfehler nur vom Produkt αL abhängt. Bei einer Reduktion von α um den Faktor 2 nimmt die Leistung des Restsignals um 3 dB ab – allerdings vergrößert sich gleichzeitig $|A|$ und damit verringert sich auch die Konvergenzgeschwindigkeit.

Der Restfehler σ_∞ ist sowohl von A wie von B aus (2.2-26) abhängig. Die Konvergenzgeschwindigkeit wird jedoch allein mit A erfaßt (siehe auch (A.4-6) mit $v_k = \sigma_k^2$, die Beträge können hier entfallen) :

$$(\sigma_k^2 - \sigma_\infty^2) = A^k \cdot (\sigma_0^2 - \sigma_\infty^2) \quad (2.2-31)$$

Die aktuelle Abweichung zur Zeit k der Restsignal-Varianz zum Restfehler ergibt sich aus der k -ten Potenz von A gewichtet mit der Anfangsabweichung. Pro Takt nimmt die Abweichung um $10 \cdot \log A \approx 10 \cdot \log(1 - 2\alpha\sigma_a^2)$ dB ab.

Zur Illustration wird folgendes Beispiel betrachtet (siehe auch Bild 5.4, K-Adaption) : $\alpha = 2^{-14}$, $\sigma_a^2 = \sigma_u^2 = 1$, $L = 32$, $\sigma_0^2 = 1$ (0 dB). Dann gilt $\sigma_\infty^2 = 0.00098$ (–30 dB) und $A = 0.99988$ ($10 \log A = -0.00053$ dB). Nach $k = 62000$ Takten gilt $\sigma_k^2 = 0.0015$ (–28 dB) sowie $\sigma_k^2 - \sigma_\infty^2 = 0.00052$ ($k \cdot 10 \log A = -33$ dB).

Es ist also zu unterscheiden zwischen :

- $\sigma_k/\text{dB} - \sigma_\infty/\text{dB}$ konvergiert gegen Null und die Konvergenz wird um so langsamer, je näher σ_k bei σ_∞ liegt.
- $(\sigma_k - \sigma_\infty)/\text{dB}$ “konvergiert” gegen $-\infty$ und die Konvergenzgeschwindigkeit ist konstant. In diesem Sinn kann man auch von einer Konvergenzgeschwindigkeit in der oder im Bereich der “Endeinstellung” sprechen.

Die Beschreibung des Iterationsverfahrens der Restsignal-Varianzen durch eine Gerade und damit die Konstanz der Konvergenzgeschwindigkeit gilt bei korrelierten Leitungscodes nicht mehr und bei der Q-Adaption ist das abhängig von den Eigenschaften der Amplituden-Verteilung des nicht-kompensierbaren Signals.

2.3 Allgemeine wertdiskrete Adaption (Q-Adaption)

2.3.1 Implementierung

Das allgemeine wertdiskrete stochastische Gradientenverfahren kann sehr ähnlich zu (2.2-7) formuliert werden (siehe auch Bild 2.2) :

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \alpha \cdot \mathbf{a}_k \cdot Q(u_k + \varphi_k) \quad (2.3-1)$$

Nachfolgend wird begründet, warum mit diesem Verfahren die Koeffizienten des adaptiven Filters sich automatisch als wertdiskret ergeben.

Mit der Funktion $Q(\cdot)$ wird die Quantisierung der Verstellsinformation $u_k + \varphi_k$ bezeichnet. Wie in Anhang A.3 beschrieben kann Q entweder vom Typ 1 (0 ist möglicher Ausgangswert, keine Sprungstelle bei 0) oder vom Typ 2 (0 ist kein möglicher Ausgangswert, Sprungstelle bei 0) sein. Die Quantisierungsschrittweite (= Abstand der Ausgangswerte von Q) wird mit q bezeichnet. Die Sprungstellen s_n müssen symmetrisch bzgl. 0 verteilt sein – ansonsten darf ihr Abstand beliebig sein. Falls die Sprungstellen speziell einen äquidistanten Abstand haben, so wird dieser Sprungstellen-Abstand mit q' bezeichnet. Anmerkung : $Q = \text{sign}$ ist vom Typ 2 mit 0 als einziger Sprungstelle sowie $q = 2$ und $q' = \infty$.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können die Sendewerte a_k als ganzzahlig angenommen werden. Für den mit q_a bezeichneten Abstand im Wertebereich von a_k gilt also :

$$\begin{aligned} q_a = 1 & \quad \text{bei} \quad a_k \in \{\dots, -1, 0, +1, \dots\} \\ q_a = 2 & \quad \text{bei} \quad a_k \in \{\dots, -3, -1, +1, +3, \dots\} \end{aligned} \quad (2.3-2)$$

Entsprechende Beispiele sind ternäre bzw. binäre Leitungscodes.

Die Größe *Koeffizienten-Korrektur* $\alpha a_k Q(u_k + \varphi_k)$ nimmt Werte im Abstand αq oder $\alpha q/2$ an (der letzte Wert gilt beispielsweise dann, wenn $Q = \text{sign}$ (also $q = 2$) und a_k ternär ist). In jeder vernünftigen numerischen Implementierung wird natürlich das Produkt αq als Zweierpotenz gewählt.

Wenn die Koeffizienten-Korrektur wertdiskret ist, ergeben sich damit natürlich auch die Koeffizienten als wertdiskret. Für den mit q_c bezeichneten Wertebereich der Koeffizienten gilt :

$$q_c = \begin{cases} \alpha q & Q \text{ ist vom Typ 1} \\ \alpha q/2 & Q \text{ ist vom Typ 2} \end{cases} \quad (2.3-3)$$

Die Vorteile von (2.3-1) sind evident : Ein wertdiskretes und damit vollständig digital realisierbares Verfahren wird mit einer einzigen Quantisierungsfunktion formuliert

und damit sind alle auftretenden Signale automatisch wertdiskret, ohne daß weitere nichtlineare Operationen in den Rechnungen erforderlich werden.

Bei der K-Adaption ist $\mathbf{c}_{\text{opt}} = \mathbf{g} = (g_0, \dots, g_{L-1})^T$ die optimale Koeffizienten-Einstellung. Bei der Q-Adaption sind die Koeffizienten jedoch mit q_c quantisiert und deshalb kann eine von \mathbf{c}_{opt} verschiedene optimale quantisierte Koeffizienten-Einstellung $\mathbf{c}_{Q,\text{opt}}$ definiert werden, die durch

$$|c_{Q,\text{opt},i} - g_i| \leq q_c/2 \quad (2.3-4)$$

eindeutig charakterisiert ist. Für eine Schar von unbekanntem Systemen (bzw. Impulsantworten) \mathbf{g} kann die Abweichung (2.3-4) als im Intervall $[-q_c/2, +q_c/2]$ gleichmäßig verteilt angenommen werden. Somit gilt dann :

$$D^2\{\mathbf{a}_k^T(\mathbf{g} - \mathbf{c}_{Q,\text{opt}})\} = \frac{q_c^2 L \sigma_a^2}{12} \quad (2.3-5)$$

Keine Restsignal-Varianz $\sigma_k^2 = D^2\{\mathbf{a}_k(\mathbf{g} - \mathbf{c}_k)\}$ und kein Restfehler σ_∞^2 kann diese Grenze unterschreiten. Tatsächlich wird bei gegebenem α der Restfehler wesentlich größer als die Schranke (2.3-5) ausfallen, so daß nachfolgend immer (Erinnerung : $q_c \in \{\alpha q, \alpha q/2\}$)

$$\frac{q_c^2 L \sigma_a^2}{12} \ll \sigma_\infty^2 \quad (2.3-6)$$

vorausgesetzt werden kann. Dies bedeutet – wie schon in Abschnitt 2.2 ausgeführt wurde –, daß auch im stabilisierten Dauerzustand die Schwankungen der Koeffizienten um ihre Optimalwerte $c_{\text{opt},i}$ oder $c_{Q,\text{opt},i}$ wesentlich größer als q_c sind. Es ist deshalb auch unerheblich, ob man sich \mathbf{c}_{opt} oder auf $\mathbf{c}_{Q,\text{opt}}$ bezieht – formal wird $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ weiterhin auf \mathbf{c}_{opt} bezogen. Diese Überlegungen verdeutlichen den Unterschied zwischen wertdiskreten adaptiven Filtern und wertdiskreten Filtern mit festen Koeffizienten.

2.3.2 Formulierung des Iterationsverfahrens der Restsignal-Varianzen mit den Funktionen W, S, T

Für den Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{c}_{\text{opt}} - \mathbf{c}_k$ der Koeffizienten-Fehleinstellung folgt aus (2.3-1) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_k - \alpha \mathbf{a}_k Q(u_k + \varphi_k) \quad (2.3-7)$$

Wie bei (2.2-19) folgt hieraus durch Norm-Bildung (mit $Q^2(\cdot)$ ist die Quadrierung gemeint)

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}\|^2 = \|\boldsymbol{\varepsilon}_k\|^2 - 2\alpha \varphi_k Q(u_k + \varphi_k) + \alpha^2 \|\mathbf{a}_k\|^2 Q^2(u_k + \varphi_k)$$

und durch Erwartungswert-Bildung mit (2.2-18)

$$\frac{\sigma_{k+1}^2}{\sigma_a^2} = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_a^2} - 2\alpha \cdot \underbrace{E\{\varphi_k Q(u_k + \varphi_k)\}}_{=: W_k} + \alpha^2 \cdot \underbrace{E\{\|\mathbf{a}_k\|^2 Q^2(u_k + \varphi_k)\}}_{=: S_k} \quad (2.3-8)$$

Das wesentliche Problem ist nun die Berechnung der beiden Erwartungswerte W_k und S_k . Dazu wird erneut (2.2-24) vorausgesetzt, was hier nochmals formuliert wird : Für hinreichend großes k_0 gilt :

$$\varphi_{N,k} = \frac{1}{\sigma_k} \varphi_k \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{hat für } k > k_0 \text{ eine von } k \text{ nahezu} \\ \text{unabhängige Verteilung mit Varianz 1} \end{array} \right. \quad (2.3-9)$$

(Nebenbei bemerkt ist (2.3-9) eine schwächere Voraussetzung als Stationarität, da über die Verteilungen höherer Ordnungen keine Aussagen getroffen werden). Natürlich ist der Wert $\varphi_{N,k}$ von k abhängig – die Unabhängigkeit von k bezieht sich nur auf die Verteilung. Da es aber bei der Berechnung von W_k und S_k nur auf die Verteilungen von $\varphi_{N,k}$ sowie von u_k (stationär) und \mathbf{a}_k (stationär) ankommt, kann der Index k bei diesen 3 Zufallsgrößen unterdrückt werden :

$$\left. \begin{array}{l} W_k = E\{\sigma_k \varphi_N \cdot Q(u + \sigma_k \varphi_N)\} \\ S_k = E\{\|\mathbf{a}\|^2 \cdot Q^2(u + \sigma_k \varphi_N)\} \end{array} \right\} \quad (2.3-10)$$

Als sinnvoller erweist sich jedoch eine Schreibweise in folgender Form :

$$\left. \begin{array}{ll} W(\sigma) := E\{\sigma \varphi_N \cdot Q(u + \sigma \varphi_N)\} & W_k = W(\sigma_k) \\ S(\sigma) := E\{\|\mathbf{a}\|^2 \cdot Q^2(u + \sigma \varphi_N)\} & S_k = S(\sigma_k) \end{array} \right\} \quad (2.3-11)$$

W und S sind 2 Funktionen, die nicht nur für ein spezielles Argument σ_k erklärt sind, sondern für alle nicht-negativen Zahlen. Die Funktionen $W, S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{R}$ sind also völlig unabhängig von k bzw. von der aktuellen Koeffizienten-Einstellung. W_k und S_k ergeben sich als Funktionswerte an der speziellen Stelle σ_k . Speziell für die K-Adaption vereinfachen sich die Funktionen W und S zu Parabeln

$$\begin{aligned} W(\sigma) &= \sigma^2 \\ S(\sigma) &= L\sigma_a^2(\sigma_u^2 + \varrho\sigma^2) \end{aligned} \quad (2.3-12)$$

und für die S-Adaption gilt :

$$\begin{aligned} W(\sigma) &= E\{\sigma \varphi_N \cdot \text{sign}(u + \sigma \varphi_N)\} \\ S(\sigma) &= L\sigma_a^2 \end{aligned} \quad (2.3-13)$$

Mit den Funktionen W und S kann nun nach (2.3-8) auch die Q-Adaption mit einem deterministischen Iterationsverfahren der Restsignal-Varianzen beschrieben werden :

$$\sigma_{k+1}^2 = \sigma_k^2 - 2\alpha\sigma_a^2 W(\sigma_k) + \alpha^2\sigma_a^2 S(\sigma_k) \quad (2.3-14)$$

Dieser sehr wichtige Ansatz stammt im Prinzip von Claasen, Mecklenbräuker [4.1]. Eine noch kompaktere Formulierung, mit der die Verbindung zu den Konvergenzsätzen aus Anhang A.4 hergestellt wird, erlaubt die nachfolgend definierte Funktion T , die ebenfalls von k bzw. der aktuellen Koeffizienten-Einstellung unabhängig ist :

$$\left. \begin{aligned} v_{k+1} &= T(v_k) & ; & & v_k &= \sigma_k^2 \\ T(v) &:= v - 2\alpha\sigma_a^2 W(\sqrt{v}) + \alpha^2\sigma_a^2 S(\sqrt{v}) \end{aligned} \right\} \quad (2.3-15)$$

Die durch (2.2-26) gegebene Beschreibung des Iterationsverfahrens der Restsignal-Varianzen für die K-Adaption kann hier mit $T(v) = Av + B$ eingeordnet werden. Allgemein ergibt sich v_k durch k -fache iterierte Anwendung der Funktion T auf $v_0 = \sigma_0^2$: $v_k = T^k(v_0)$. Falls das durch (2.3-15) beschriebene Iterationsverfahren konvergiert, so ergibt sich der Restfehler $v_\infty = \sigma_\infty^2$ als Fixpunkt von T :

$$T(\sigma_\infty^2) = \sigma_\infty^2 \quad (2.3-16)$$

Nach Anhang A.4 ist die Konvergenz des durch (2.3-15) beschriebenen Iterationsverfahrens und auch die Konvergenzgeschwindigkeit abhängig von der in Definition A.1 erklärten Norm der Funktion T über dem Intervall I . Zur Berechnung dieser Norm wird die Ableitung von T benötigt :

$$T'(v) = 1 - \alpha\sigma_a^2 \cdot \frac{W'(\sqrt{v})}{\sqrt{v}} + \frac{\alpha^2\sigma_a^2}{2} \cdot \frac{S'(\sqrt{v})}{\sqrt{v}} \quad (2.3-17)$$

Es sollte deshalb nicht überraschen, wenn nachfolgend die Ableitungen von W und S genau untersucht werden.

Die Berechnung der Funktionen W und S steht in keinem Zusammenhang mit dem Iterationsverfahren und erfordert nur die Kenntnis

- der Quantisierungsfunktion Q der Verstellinformation (bzw. der Sprungstellen s_n und der Quantisierungsschrittweite q),
- der Verteilung des nicht-kompensierbaren Signals u_k und
- des Verteilungstyps des Restsignals φ_k (bzw. der Verteilung von $\varphi_{N,k}$).

Der Verteilungstyp des Restsignals wird in Kapitel 3 genauer untersucht. Die Amplituden-Verteilungsdichtefunktion f_{φ_N} des auf Varianz 1 normierten Restsignals ist symmetrisch bzgl. Null und es gilt entweder

- f_{φ_N} ist kontinuierlich und eine leicht verformte Normalverteilung oder
- f_{φ_N} ist diskret (also eine Folge von Dirac-Stößen) und eine Abtastung einer leicht verformten Normalverteilung. Dabei liegen die Abstände der Dirac-Stöße in der Größenordnung von q_c und sind nach (2.3-6) somit wesentlich kleiner als die betrachteten Restfehler.
- Nur bei ganz extrem ausgearteten (und praktisch nicht relevanten) Verteilungen des nicht-kompensierbaren Signals, wo die Verteilungsdichtefunktion beispielsweise nur aus einem Dirac-Stoß (bei $u_k \equiv 0$) oder zwei Dirac-Stößen (bei $u_k \sim$ Binär) besteht, weicht f_{φ_N} stärker von der Normalverteilung ab.

Das weitere Vorgehen erfolgt nun in 2 Schritten :

1. Schritt Für einige theoretische Einsichten sowie für den allgemeinen Beweis der Konvergenz der Q-Adaption (Satz 2.2) genügt der Nachweis einiger allgemeiner Eigenschaften der Funktion T , wie z.B. das Verhalten der Ableitungen. Hierzu genügt die Voraussetzung vollkommen, daß f_{φ_N} ungefähr der Verteilungsdichtefunktion der Normalverteilung entspricht – unwesentlich ist, ob f_{φ_N} diskret oder kontinuierlich ist.

2. Schritt Für die praktische Berechnung von Restfehler und Konvergenzgeschwindigkeit muß T natürlich explizit bekannt sein. Wenn über die Restsignal-Verteilung nichts anderes bekannt ist, wird für f_{φ_N} explizit die Normalverteilung eingesetzt. In vielen Fällen ist jedoch die Amplituden-Verteilungsdichtefunktion f_u des nicht-kompensierbaren Signals an den Sprungstellen s_n von Q in Taylor-Reihen entwickelbar und dann gehen von $\varphi_{N,k}$ nur noch die Momente ein. Dies ist vorteilhaft, da die Momentenformel der Normalverteilung

$$E\{\varphi_N^{2r}\} = (2r - 1) \cdot (2r - 3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 \quad (2.3-18)$$

sehr robust ist, d.h. wenn φ_N nicht exakt normalverteilt ist (verformt und eventuell abgetastet), so ist die Formel (2.3-18) doch weiterhin in guter Näherung gültig. Zudem wird sich herausstellen, daß meistens nur die Momente von sehr niedriger Ordnung relevant sind.

In Abschnitt 2.3.3 wird zunächst die Funktion W analysiert (bezüglich der beiden vorangehend aufgeführten Schritte), dann in Abschnitt 2.3.4 die weniger wichtige Funktion S und schließlich erfolgen in Abschnitt 2.3.5 die Aussagen zum Restfehler und zur Konvergenzgeschwindigkeit (ebenfalls bezüglich der beiden Schritte).

2.3.3 Analyse der Funktion W

In Abschnitt 2.3.3.1 werden zunächst einige andere Darstellungen der Funktion W abgeleitet und dann erfolgen einige allgemeine Aussagen zum Verhalten von W , wobei nur vorausgesetzt wird, daß die Verteilungsdichtefunktion f_{φ_N} von $\varphi_{N,k}$ ungefähr der Normalverteilung entspricht (verformt und eventuell abgetastet). In Abschnitt 2.3.3.2 wird dann die Verteilungsdichte des nicht-kompensierbaren Signals u_k als Taylorentwickelbar vorausgesetzt, womit vom Restsignal schließlich nur noch die Momente eingehen.

2.3.3.1 Berechnung von W bei beliebiger Verteilung des Signals u_k

Zur Motivation der im nächsten Satz einzuführenden Hilfsfunktion h_φ dient folgende Vorschau : Für die Berechnung von $W(\sigma)$ muß gemäß (2.3-11) im wesentlichen das Integral

$$E\{Q(u + \sigma\varphi_N)\varphi_N | u\} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{Q(u + \sigma s)}_{\text{Treppenfunktion}} \underbrace{s f_{\varphi_N}(s)}_{\text{Dichtefunktion}} ds$$

ausgewertet werden. Bei partieller Integration muß die Treppenfunktion Q differenziert und $s f_{\varphi_N}(s)$ muß integriert werden :

Satz 2.1 Die Hilfsfunktion

$$h_\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} s f_{\varphi_N}(s) ds \quad (2.3-19)$$

besitzt folgende Eigenschaften :

$$h_\varphi(0) = -\frac{1}{2}E\{|\varphi_N|\} < 0 \quad (2.3-20a)$$

$$h_\varphi(\infty) = E\{\varphi_N\} = 0 \quad (2.3-20b)$$

$$h_\varphi(\xi) = h_\varphi(-\xi) \leq 0 \quad (2.3-20c)$$

$$h'_\varphi(\xi) = \xi \cdot f_{\varphi_N}(\xi) \quad (2.3-20d)$$

$$\max_{\xi} |h_\varphi(\xi)| = -h_\varphi(0) \quad (2.3-20e)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \xi^r h_\varphi(\xi) = 0 \quad \text{für } r \geq 0 \quad (2.3-20f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^r h_{\varphi}(\xi) d\xi = -\frac{E\{\varphi_N^{r+2}\}}{r+1} \quad \text{für } r \geq 0 \quad (2.3-20g)$$

Speziell für $r = 0$ wird (2.3-20g) zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{\varphi}(\xi) d\xi = -1 \quad (2.3-20h)$$

Speziell für exakt normalverteiltes φ gilt :

$$h_{\varphi}(\xi) = -f_{\varphi_N}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\xi^2/2) \quad (2.3-21)$$

Beweis a) bis c) folgen aus der vorausgesetzten Symmetrie der Verteilung von $\varphi_{N,k}$. Nach d) liegt bei Null der einzige Extremwert, woraus e) folgt. Zum Beweis von f) sei r ungerade. Dann gilt :

$$0 \leq \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \xi^r h_{\varphi}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\xi} \xi^r s f_{\varphi_N}(s) ds \leq \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\xi} s^{r+1} f_{\varphi_N}(s) ds = 0,$$

da die r -ten Momente von $\varphi_{N,k}$ existieren sollen. Ferner gilt :

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^r h_{\varphi}(\xi) = (-1)^r \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \xi^r h_{\varphi}(\xi) = 0$$

Für gerades r verläuft der Beweis entsprechend. Zum Beweis von g) wird die Reihenfolge der Integration vertauscht (das ist leicht nachvollziehbar, weil vor und nach der Vertauschung jeweils $s \leq \xi$ gilt) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^r h_{\varphi}(\xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\xi} s f_{\varphi_N}(s) ds \xi^r d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_s^{\infty} \xi^r d\xi s f_{\varphi_N}(s) ds \\ &= \lim_{d \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_s^d \xi^r d\xi s f_{\varphi_N}(s) ds = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{r+1} - s^{r+1}}{r+1} s f_{\varphi_N}(s) ds \\ &= \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{d^{r+1}}{r+1} h_{\varphi}(\infty) - \frac{1}{r+1} \int_{-\infty}^{\infty} s^{r+2} f_{\varphi_N}(s) ds = -\frac{E\{\varphi_N^{r+2}\}}{r+1} \end{aligned}$$

Damit ist g) bewiesen. Für $r = 0$ folgt daraus direkt h). (2.3-21) ergibt sich durch direkte Berechnung des Integrals (2.3-19), womit alle Aussagen des Satzes bewiesen sind.

Wie schon vorangehend erläutert, wird (2.3-21) aber an dieser Stelle nicht weiter verwendet. Zunächst wird der folgende bedingte Erwartungswert betrachtet :

$$E\{\sigma\varphi_N Q(u + \sigma\varphi_N) | u\} = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} Q(u + \sigma s) s f_{\varphi_N}(s) ds =$$

Mit partieller Integration und mit der in (A.3-4) angegebenen Ableitung der Quantisierungsfunktion sowie mit (2.3-20f) folgt weiter :

$$\begin{aligned} &= \sigma \cdot Q(u + \sigma s) h_{\varphi}(s) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} Q'(u + \sigma s) h_{\varphi}(s) ds \\ &= -q\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \delta(u + \sigma s - s_n) h_{\varphi}(s) ds \\ &= -q\sigma \sum_n h_{\varphi}\left(\frac{u - s_n}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (2.3-22)$$

Daraus folgt für $W(\sigma)$ mit (A.2-3) :

$$\begin{aligned} W(\sigma) &= E\{\sigma\varphi_N Q(u + \sigma\varphi_N)\} \\ &= E\{E\{\sigma\varphi_N Q(u + \sigma\varphi_N) | u\}\} \\ &= -q\sigma \sum_n E\{h_{\varphi}\left(\frac{u - s_n}{\sigma}\right)\} \\ &= -q\sigma \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} h_{\varphi}\left(\frac{\eta - s_n}{\sigma}\right) f_u(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (2.3-23a)$$

$$= -q\sigma^2 \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} h_{\varphi}(\eta) f_u(\eta\sigma + s_n) d\eta \quad (2.3-23b)$$

$$= -q \frac{\sigma}{\sigma_u} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} h_{\varphi}\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) f_{u_N}\left(\frac{\eta + s_n}{\sigma_u}\right) d\eta \quad (2.3-23c)$$

Dabei ist f_{u_N} die auf Varianz 1 normalisierte Amplituden-Verteilungsdichtefunktion des nicht-kompensierbaren Signals wie in (A.1-12) für den allgemeinen Fall angegeben :

$$f_u(\eta) = \frac{1}{\sigma_u} f_{u_N}\left(\frac{\eta}{\sigma_u}\right) \quad (2.3-24)$$

Aus dem Ergebnis (2.3-23) ist ersichtlich, daß $W(\sigma)$ primär von den Werten der Verteilungsdichtefunktion f_u an den Sprungstellen der Quantisierungskennlinie abhängt — denn $h_\varphi(\eta)$ wird in (2.3-23b) genau für $\eta = 0$ betragsmäßig maximal, so daß die Werte von f_u in den Umgebungen von s_n bestimmend sind.

Mit Satz A.1 aus Abschnitt A.3 kann überprüft werden, ob das Ergebnis (2.3-23) mit den Resultaten zur K-Adaption verträglich ist. Dazu habe Q äquidistante Sprungstellen mit $q = q'$. Mit $q' \rightarrow 0$ folgt aus (2.3-23b) mit (2.3-20h) :

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} W(\sigma) &= -\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_\varphi(\eta) \cdot \underbrace{\lim_{q \rightarrow 0} q \sum_n f_u(\eta\sigma + s_n)}_{= \int_{-\infty}^{\infty} f_u(\eta\sigma + \xi) d\xi = 1} d\eta = \sigma^2 \end{aligned}$$

Dies entspricht genau (2.3-12).

Im Rest dieses Abschnittes werden nun Aussagen abgeleitet, die später für den Beweis des Satzes 2.2 über die allgemeine Konvergenz der Q-Adaption benötigt werden, d.h. für die Existenz des Grenzwertes $\sigma_\infty^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2$.

Vorausgesetzt wird jetzt die Stetigkeit der Verteilungsdichtefunktion f_u . Aus (2.3-23b) ergibt sich sofort die Stetigkeit der Funktion W . Aus (2.3-23a) folgt :

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{W(\sigma)}{\sigma} = -qh_\varphi(0) \sum_n 1 > 0 \quad ; \quad \text{d.h.} \quad (2.3-25a)$$

$$W(\infty) = \infty \quad (2.3-25b)$$

Die letzte Aussage gilt unabhängig von der Anzahl der Quantisierungsstufen (endlich oder unendlich). Aus (2.3-23b) folgt mit (2.3-20h) :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{W(\sigma)}{\sigma^2} = -q \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} h_\varphi(\eta) f_u(s_n) d\eta = q \sum_n f_u(s_n) \quad ; \quad \text{d.h.} \quad (2.3-26a)$$

$$W(0) = 0 \quad (2.3-26b)$$

$$W'(0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{W(\sigma)}{\sigma} = 0 \quad (2.3-26c)$$

Aus (2.3-23a) folgt :

$$\begin{aligned}
W'(\sigma) &= -q \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\sigma} \left[\sigma h_\varphi \left(\frac{\eta - s_n}{\sigma} \right) \right] \cdot f_u(\eta) d\eta \\
&= -q \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \left[h_\varphi \left(\frac{\eta - s_n}{\sigma} \right) - \frac{\eta - s_n}{\sigma} h'_\varphi \left(\frac{\eta - s_n}{\sigma} \right) \right] f_u(\eta) d\eta \quad \text{setze } \xi = \frac{\eta - s_n}{\sigma} \\
&= q\sigma \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \left[\underbrace{-h_\varphi(\xi)}_{\geq 0} + \underbrace{\xi^2 f_{\varphi_N}(\xi)}_{\geq 0} \right] \cdot \underbrace{f_u(\sigma\xi + s_n)}_{\geq 0} d\xi \quad \text{mit (2.3-20d)} \\
&> 0 \quad \text{für } \sigma > 0
\end{aligned} \tag{2.3-27a}$$

Damit erweist sich auch die Ableitung W' als stetig. Nur wenn φ beschränkt ist und gleichzeitig f_u im Bereich um die Sprungstellen s_n konstant Null ist, könnte $W'(\sigma) = 0$ auch für $\sigma > 0$ eintreten. Ansonsten ist $W'(\sigma)$ deutlich positiv, wenn f_u im Bereich der Sprungstellen s_n deutlich positiv ist. Aus der mittleren Darstellung in (2.3-27a) folgt noch (mit $\xi = \eta - s_n$) :

$$\begin{aligned}
W'(\infty) &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} q \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \left[-h_\varphi \left(\frac{\xi}{\sigma} \right) + \left(\frac{\xi}{\sigma} \right)^2 f_{\varphi_N} \left(\frac{\xi}{\sigma} \right) \right] f_u(\xi + s_n) d\xi \\
&= -q \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} h_\varphi(0) f_u(\xi + s_n) d\xi \\
&= -qh_\varphi(0) \sum_n 1 > 0
\end{aligned} \tag{2.3-27b}$$

Aus der letzten Darstellung in (2.3-27a) folgt :

$$\begin{aligned}
W''(0) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{W'(\sigma) - W'(0)}{\sigma - 0} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{W'(\sigma)}{\sigma} \\
&= q \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \left[-h_\varphi(\xi) + \xi^2 f_{\varphi_N}(\xi) \right] f_u(s_n) d\xi \\
&= 2q \sum_n f_u(s_n) \geq 0 \quad \text{mit (2.3-20h) und } E\{\varphi_N^2\} = 1
\end{aligned} \tag{2.3-27c}$$

2.3.3.2 Berechnung von W bei Taylor-Entwickelbarkeit der Verteilungsdichtefunktion des Signals u_k

Mit (2.3-23) ist bereits eine sehr effektive und praktisch anwendbare Methode zur Berechnung von $W(\sigma)$ angegeben, sofern die Verteilungsdichtefunktion f_u in analytischer Form (d.h. in einem geschlossenen Ausdruck) gegeben ist. Wesentliche Vereinfachungen in der Auswertung von f_u und Einsichten in das Verhalten der Funktion W ergeben sich, wenn f_u an den Sprungstellen s_n der Quantisierungskennlinie Q in Taylor-Reihen entwickelt werden kann :

$$f_u(\eta + s_n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_u^{(r)}(s_n)}{r!} \eta^r = \frac{1}{\sigma_u} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_{u_N}^{(r)}(s_n/\sigma_u)}{r!} \left(\frac{\eta}{\sigma_u}\right)^r \quad (2.3-28)$$

Für die Anwendung der Taylor-Entwicklung ist es aber nicht notwendig, daß (2.3-28) exakt gilt, wie folgende Überlegungen zeigen :

Gemäß (2.3-23a) ergibt sich der Funktionswert $W(\sigma)$ als inneres Produkt der beiden Funktionen $f_u(\eta)$ und $-\sum_n h_\varphi((\eta - s_n)/\sigma)$, wenn man von dem Vorfaktor $q\sigma$ einmal absieht. Diese beiden Funktionen sind – allerdings nicht zueinander maßstabsgerecht – für typische Größenverhältnisse bei der EndEinstellung in Bild 2.3 dargestellt. Die “Breiten” von $f_u(\eta)$ bzw. $h_\varphi(\eta/\sigma)$ liegen in der Größenordnung von σ_u bzw. σ . Die Abstände zwischen den Sprungstellen s_n sind normalerweise etwa so wie im Bild 2.3 dargestellt — aber das ist für die jetzigen Überlegungen unwichtig. Im Bereich der EndEinstellung des adaptiven Filters gilt $\sigma_\infty \ll \sigma_u$ gemäß (2.2-11) und somit sind die h_φ -Bögen schmal gegenüber f_u . Für einen h_φ -Bogen (bei der Sprungstelle s_1) ist symbolisch die Auswirkung eines diskreten Restsignals angegeben : Wenn die Verteilungsdichtefunktion f_φ des Restsignals aus Dirac-Stößen im Abstand q_c besteht, so ist $h_\varphi(\eta/\sigma)$ eine Treppenfunktion mit q_c als Treppenbreite in der Größenordnung $q_c \ll \sigma_\infty$ gemäß (2.3-6).

Zur Illustration der Größenordnungen in den Relationen $q_c \ll \sigma_\infty \ll \sigma_u$ wird folgendes Beispiel zur S-Adaption betrachtet (siehe auch Bild 5.4, S-Adaption ab Taktnummer 100000) : Es sei $\sigma_a = 1$, $L = 32$ und $\alpha = 2^{-14}$. Für $\sigma_u = 1$ (0 dB) gilt dann $\sigma_\infty^2 = 0.0012$ (-29 dB) und $q_c = \alpha$ (entspricht -84 dB). Zusammenfassung : ($q_c = 0.000061$) \ll ($\sigma_\infty = 0.035$) \ll ($\sigma_u = 1$). Für den Bereich der Anfangsadaptation mit $\sigma_k \approx \sigma_u$ oder sogar $\sigma_k \gg \sigma_u$ sind die h_φ -Bögen nicht schmal gegenüber f_u und Bild 5.4 zeigt denn entsprechend auch eine um so bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Simulation, je näher σ_k an σ_∞ rückt.

Offensichtlich gehen bei der Berechnung von $W(\sigma)$ nur die dick markierten Funktionswerte von f_u ein. In den meisten Fällen ist der Abbruch der Taylor-Entwicklung (2.3-28) ohne nennenswerten Verlust in der Genauigkeit schon nach $r = 0$ oder $r = 1$ möglich. Nur wenn $f_u(s_n)$ sehr klein ist, sollte noch $f_u''(s_n)$ berücksichtigt werden.

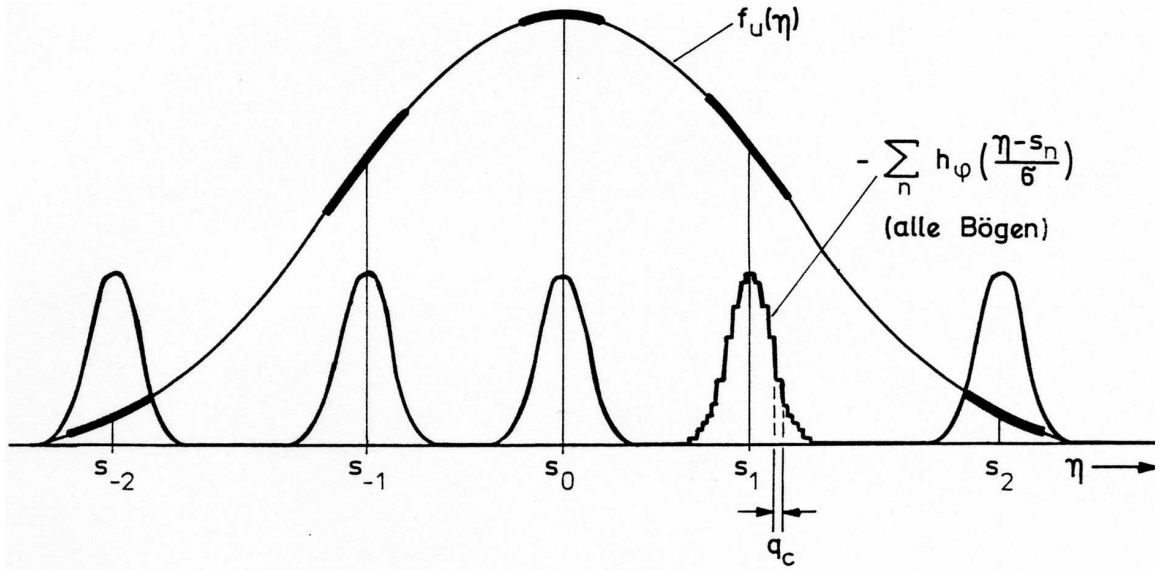


Bild 2.3: Darstellung des Funktionswertes $W(\sigma)$ als inneres Produkt der beiden angegebenen Funktionen bei typischen Größenverhältnissen

Wenn f_u nicht in analytischer Form bekannt ist, sondern nur aufgrund von Messungen als Histogramm zur Verfügung steht, so können schon aus einem Histogramm mit nur grober Auflösung problemlos Schätzungen für die Werte $f_u(s_n)$, $f'_u(s_n)$, $f''_u(s_n)$ gewonnen werden. Diese Approximation des Histogramms mit Geraden oder Polynomen 2. Grades braucht natürlich nur auf die etwa σ bis 3σ breiten Bereiche um s_n angepaßt zu werden (eine derartige Anpassung erfolgt für ein Beispiel explizit in Abschnitt 5.3).

Es wird nochmals betont, daß die Überlegungen hier nur für den Bereich der End-einstellung gelten, beispielsweise für den durch $\sigma_k/\sigma_\infty \leq 15$ dB definierten Bereich. Damit können der Restfehler und die Konvergenzgeschwindigkeit im Bereich der End-einstellung sehr genau berechnet werden. Die Konvergenzgeschwindigkeit der Anfangsadaption mit $\sigma_k \gg \sigma_\infty$ wird dagegen nur ungenau erfaßt. In der Praxis ist diese Anfangsadaption allerdings völlig unproblematisch, so daß es sinnvoll ist, wenn die hier entwickelten Methoden auf den Bereich der End-einstellung zugeschnitten werden.

Weitergerechnet wird jetzt mit der vollständigen Entwicklung (2.3-28), die durch Einsetzen in (2.3-23a) zu

$$W(\sigma) = -q \frac{\sigma}{\sigma_u} \sum_n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_{u_N}^{(r)}(s_n/\sigma_u)}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} h_\varphi\left(\frac{\eta}{\sigma}\right) \cdot \left(\frac{\eta}{\sigma_u}\right)^r d\eta$$

führt. Mit (2.3-20g) folgt daraus

$$W(\sigma) = q \frac{\sigma^2}{\sigma_u} \sum_n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_{u_N}^{(r)}(s_n/\sigma_u)}{(r+1)!} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^r \cdot E\{\varphi_N^{r+2}\}$$

Wegen der Symmetrie des Restsignals verschwinden die ungeraden Momente. Mit den normierten Momenten M_{2r} kann das Hauptergebnis so geschrieben werden :

$$\left. \begin{aligned} W(\sigma) &= q \sigma_u R^2 \sum_{r=0}^{\infty} R^{2r} M_{2r} \sum_n f_{u_N}^{(2r)}\left(\frac{s_n}{\sigma_u}\right) \quad , \quad R = \frac{\sigma}{\sigma_u} \\ \text{mit} \quad M_{2r} &= \frac{E\{\varphi_N^{2r+2}\}}{(2r+1)!} \end{aligned} \right\} \quad (2.3-29)$$

Generell gilt $M_0 = 1$ und $M_2 = 1/2$. Bei Verwendung von (2.3-18) ergibt sich

$$M_{2r} = \frac{1}{2^r \cdot r!} = \frac{M_{2r-2}}{2r} \quad (2.3-30)$$

und somit $M_4 = 1/8$, $M_6 = 1/48$, $M_8 = 1/384$. Die Zahlen M_{2r} konvergieren also sehr schnell gegen Null und weil zudem $R \ll 1$ für den interessierenden Bereich der EndEinstellung gilt, ist oftmals schon der Abbruch nach $r = 0$ oder $r = 1$ in (2.3-29) ausreichend genau. $r = 0$ bedeutet, daß f_u in den Umgebungen der Sprungstellen s_n durch waagerechte Geraden approximiert wird und in diesem Fall ergibt sich das besonders einfache Ergebnis

$$\begin{aligned} W(\sigma) &= q \frac{\sigma^2}{\sigma_u} \sum_n f_{u_N}\left(\frac{s_n}{\sigma_u}\right) = q \sigma^2 \sum_n f_u(s_n) \\ &= \sigma^2 \cdot W^* \quad \text{mit} \quad W^* := q \sum_n f_u(s_n) \end{aligned} \quad (2.3-31)$$

$W(\sigma)$ wird also um so größer (und damit der Restfehler um so kleiner, wie später noch deutlich wird), je besser die Sprungstellen von Q im Bereich der großen Werte der Verteilungsdichtefunktion f_u verteilt sind.

2.3.4 Analyse der Funktion S

Die Analyse der Funktion S erfolgt nun mit ähnlichen Methoden wie bei der Funktion W . Die Situation bei S ist jetzt einerseits etwas komplizierter aber andererseits ist bei S nur der Fall $\sigma = 0$ von gleicher Bedeutung wie der gesamte Funktionsverlauf bei W . Nach der Definition (2.3-11) gilt für $S(0)$:

$$S(0) = E\{\|\mathbf{a}\|^2 \cdot Q^2(u)\} = L\sigma_a^2 \cdot E\{Q^2(u)\} \quad (2.3-32)$$

Für die Varianz des quantisierten Signals u_k gilt :

$$\begin{aligned} E\{Q^2(u)\} &= \sum_n (nq + q_0)^2 P\{s_n < u < s_{n+1}\} \\ &= \sum_n (nq + q_0)^2 [F_u(s_{n+1}) - F_u(s_n)] \end{aligned} \quad (2.3-33)$$

Dabei ist $q_0 = 0$ bzw. $q_0 = 1/2$ für den Quantisierer vom Typ 1 bzw. 2 (siehe auch Bild A.1) definiert und F_u sei die Verteilungsfunktion des Signals u_k .

Die direkte Berechnung von $S(\sigma)$ in einem geschlossenen Ausdruck ist relativ umständlich. Deshalb wird zunächst die Ableitung S' bestimmt. Aus der Definition (2.3-11) für S sowie der in (A.3-4) angegebenen Ableitung von Q folgt :

$$\begin{aligned} S'(\sigma) &= E\{\|\mathbf{a}\|^2 \cdot \frac{d}{d\sigma} [Q^2(u + \sigma\varphi_N)]\} \\ &= 2 \cdot E\{\|\mathbf{a}\|^2 \varphi_N \cdot Q(u + \sigma\varphi_N) \cdot Q'(u + \sigma\varphi_N)\} \\ &= 2q \sum_n E\left\{\|\mathbf{a}\|^2 \varphi_N E\{Q(u + \sigma\varphi_N) \cdot \delta(u + \sigma\varphi_N - s_n) \mid \mathbf{a}, \varphi_N\}\right\} \end{aligned}$$

Für die letzte Umformung wurde (A.2-3) benutzt. Der innere Erwartungswert erstreckt sich dabei nur über u_k und wird nun ausgeschrieben :

$$\begin{aligned} S'(\sigma) &= 2q \sum_n E\left\{\|\mathbf{a}\|^2 \varphi_N \int_{-\infty}^{\infty} Q(\eta + \sigma\varphi_N) \delta(\eta + \sigma\varphi_N - s_n) f_u(\eta) d\eta\right\} \\ &= 2q \sum_n Q(s_n) \cdot E\{\|\mathbf{a}\|^2 \varphi_N \cdot f_u(s_n - \sigma\varphi_N)\} \end{aligned} \quad (2.3-34a)$$

Für den Nullpunkt folgt das wichtige Ergebnis :

$$S'(0) = 2q \cdot E\{\|\mathbf{a}\|^2 \varphi_N\} \cdot \underbrace{\sum_n Q(s_n) f_u(s_n)}_{=0} = 0 \quad (2.3-34b)$$

denn $Q(0) = 0$ und $Q(-\xi)f_u(-\xi) = -Q(\xi)f_u(\xi)$. Für $\sigma \rightarrow 0$ ist $S(\sigma)$ also in erster Ordnung konstant und deshalb kann $S(\sigma)$ für kleines σ schon mit einer gewissen Genauigkeit durch $S(0)$ approximiert werden. Wegen $f_u(\pm\infty) = 0$ folgt aus (2.3-34a) noch das Ergebnis

$$S'(\infty) = 0 \quad , \quad (2.3-34c)$$

das sich vom wertkontinuierlichen Fall (mit $S'(\infty) = \infty$ gemäß (2.3-12)) vollkommen unterscheidet.

Eine exakte Berechnung von $S(\sigma)$ gemäß

$$S(\sigma) = S(0) + \int_0^\sigma S'(\xi) d\xi \quad (2.3-35)$$

führt auf unhandliche Ausdrücke. Einfacher werden die Verhältnisse, wenn f_u als stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Aus (2.3-34a) ergibt sich die 2.Ableitung

$$S''(\sigma) = -2q \sum_n Q(s_n) \cdot E\{\|\mathbf{a}\|^2 \varphi_N^2 \cdot f'_u(s_n - \sigma \varphi_N)\} \quad (2.3-36a)$$

als stetig und für den Nullpunkt gilt hiernach mit ϱ gemäß (2.2-21) bzw. (2.2-25) :

$$S''(0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{S'(\sigma)}{\sigma} = -2q \cdot L\sigma_a^2 \varrho \cdot \sum_n Q(s_n) f'_u(s_n) \quad (2.3-36b)$$

Mit diesen Ergebnissen kann die Funktion S durch Abbruch ihrer Taylor-Reihenentwicklung approximiert werden :

$$\begin{aligned} S(\sigma) &\approx S(0) + S'(0) + \frac{\sigma^2}{2} S''(0) \\ &= S(0) - \sigma^2 L\sigma_a^2 \varrho q \sum_n Q(s_n) f'_u(s_n) \\ &= S(0) - \sigma^2 L\sigma_a^2 \varrho S^* \quad \text{mit} \quad S^* := q \sum_n Q(s_n) f'_u(s_n) \end{aligned} \quad (2.3-37)$$

Weitere Verbesserungen dieser Näherung sind nicht erforderlich. Wenn f_u Taylorentwickelbar ist, kann allerdings mit der gleichen Methode wie bei W auch für S eine exakte Darstellung erreicht werden, in die dann die ungeraden Ableitungen von f_u eingehen.

2.3.5 Restfehler und Konvergenzgeschwindigkeit

Mit der "Konvergenz" eines Adaptionverfahrens ist die Konvergenz der Restsignal-Varianzen σ_k^2 gegen den Restfehler σ_∞^2 gemeint und somit die Konvergenz des durch (2.3-14) beschriebenen deterministischen Iterationsverfahrens. Mit den vorangehend abgeleiteten Ergebnissen zu den Funktionen W und S kann die Konvergenz der Q-Adaption unter sehr allgemeinen Voraussetzungen generell nachgewiesen werden :

Satz 2.2 Die Quantisierungskennlinie Q habe endlich viele Sprungstellen s_n . Die Amplituden-Verteilungsdichtefunktion f_u des nicht-kompensierbaren Signals u_k sei stetig differenzierbar und in der Umgebung von mindestens einer Sprungstelle s_n nicht konstant Null. Ferner soll

$$\|T\|_I = \sup_{v \in I} |T'(v)| \stackrel{!}{<} 1$$

gelten, wobei diese Bedingung durch eine hinreichend klein gewählte Verstellgröße α erfüllt werden kann.

Dann konvergiert die Q-Adaption und die Konvergenzgeschwindigkeit kann so abgeschätzt werden :

$$(\sigma_k^2 - \sigma_\infty^2) \leq (\|T\|_I)^k \cdot (\sigma_0^2 - \sigma_\infty^2)$$

Der ziemlich aufwendige Beweis dieses Satzes erfolgt in Abschnitt A.5. Abgesehen von diskreten Signalen (siehe Abschnitt 3.3.3) sind die Voraussetzungen des Satzes in der Praxis fast immer erfüllt. Für die Abschätzung der Konvergenz sollte $\|T\|_I$ für ein möglichst schmales Intervall I mit dem Restfehler als unterer Grenze berechnet werden, um den wichtigen Bereich der EndEinstellung besonders genau zu erfassen.

Generell ist es allerdings unmöglich, sowohl den Restfehler wie die Konvergenzgeschwindigkeit explizit in geschlossener Form anzugeben. Beispiele zur Berechnung von Restfehler und Konvergenzgeschwindigkeit direkt aus $W(\sigma)$ für verschiedene Verteilungen des Signals u_k werden noch in Abschnitt 2.4 für die S-Adaption angegeben.

Von jetzt an wird vorausgesetzt, daß die Verteilungsdichtefunktion f_u sinnvoll durch Geraden approximierbar sein soll. Genauer bedeutet das eine Näherung durch eine Treppenfunktion, wobei die Approximation aber nur innerhalb eines schmalen Bereiches der Treppenstufenbreite stimmen muß. Der Abbruch nach $r = 0$ in den Darstellungen für $W(\sigma)$ und $S(\sigma)$ ermöglicht nun erstmals geschlossene Ausdrücke für den Restfehler und die Konvergenzgeschwindigkeit. Die Ergebnisse aus (2.3-31) und (2.3-37) erlauben die Darstellungen

$$\left. \begin{aligned} W(\sigma) &= \sigma^2 \cdot W^* \\ S(\sigma) &= S(0) - \sigma^2 \cdot L\sigma_a^2 \varrho S^* \end{aligned} \right\} \quad (2.3-38)$$

mit den von σ unabhängigen Konstanten

$$\left. \begin{aligned} W^* &= \frac{q}{\sigma_u} \sum_n f_{u_N} \left(\frac{s_n}{\sigma_u} \right) = q \sum_n f_u(s_n) \\ S^* &= \frac{q}{\sigma_u^2} \sum_n Q(s_n) f'_{u_N} \left(\frac{s_n}{\sigma_u} \right) = q \sum_n Q(s_n) f'_u(s_n) \\ S(0) &= L\sigma_a^2 \cdot E\{Q^2(u)\} \end{aligned} \right\} \quad (2.3-39)$$

Zum Vergleich mit der K-Adaption und zur Verifizierung werden die Grenzwerte für $q = q' \rightarrow 0$ berechnet. Mit Satz A.1 folgt $W^* \rightarrow 1$, $S^* \rightarrow -1$, $S(0) \rightarrow L\sigma_a^2\sigma_u^2$ für $q' \rightarrow 0$. Aus (2.3-38) und (2.3-15) ergibt sich nun die Funktion T als eine Gerade :

$$T(v) = \underbrace{(1 - 2\alpha\sigma_a^2W^* - \alpha^2L\sigma_a^4\rho S^*)}_{= A} \cdot v + \underbrace{\alpha^2\sigma_a^2S(0)}_{= B} \quad (2.3-40)$$

Abgesehen von den Konstanten entspricht das genau der Formel (2.2-26) für die K-Adaption. Für den Restfehler und die Konvergenzgeschwindigkeit folgt in gleicher Weise wie bei der K-Adaption (oder auch direkt aus Satz A.3) :

$$\sigma_\infty^2 = \frac{\alpha L\sigma_a^2}{2W^* + \alpha L\sigma_a^2\rho S^*} E\{Q^2(u)\} \approx \frac{\alpha L\sigma_a^2}{2W^*} E\{Q^2(u)\} \quad (2.3-41a)$$

$$\|T\|_I = |A| \approx 1 - 2\alpha\sigma_a^2W^* \quad (2.3-41b)$$

Bei der Näherung für kleines α wirkt sich S^* überhaupt nicht mehr aus. Offensichtlich wird der Restfehler um so kleiner und die Konvergenzgeschwindigkeit um so höher, je größer die Werte der Verteilungsdichtefunktion f_u an den Sprungstellen der Quantisierungskennlinie sind. Zu beachten ist, daß von der Verteilungsdichtefunktion f_φ des Restsignals jetzt explizit nur noch das 0. und 2. Moment eingehen.

Offensichtlich bedeutet eine Halbierung von α (d.h. Erhöhung der Koeffizientenwortlänge um 1 Bit) eine Reduktion des Restsignals um 3 dB.

2.3.6 Optimierung der Quantisierungskennlinie

Bei der Optimierung der Quantisierungskennlinie Q ist diejenige Verteilung der Sprungstellen s_n gesucht, die bei gleichem Restfehler oder gleicher Konvergenzgeschwindigkeit zum größten Werteabstand q_c der Koeffizienten führt. Die Quantisierungsschrittweite q von Q ist dabei völlig nebensächlich, da q genau wie α die Wirkung einer Verstärkung hat. Außerdem gilt nach (2.3-3) auch $q_c \in \{\alpha q, \alpha q/2\}$, so daß die multiplikative Aufteilung von q_c in α und q unwesentlich ist.

Dieser Abschnitt beschränkt sich auf Quantisierer vom Typ 2 (siehe Bild A.1), weil diese als Sonderfall auch die Sign-Quantisierung enthalten. Ferner werden hier nur äquidistante Sprungstellen betrachtet und zur Vereinfachung wird Q als unbegrenzt angenommen, d.h. $s_n = nq'$, $Q(s_n) = nq$, $q_c = \alpha q/2$.

Die Optimierung von Q bedeutet nun eine geeignete Wahl von q' . Kleine Werte von q' bedeuteten viele Sprungstellen im relevanten Amplitudenbereich und damit hohen Aufwand in der Signalverarbeitung. Umgekehrt führt der Grenzfall $q' \rightarrow \infty$ auf den Sonderfall der S-Adaption, bei der die Signalverarbeitung am einfachsten wird.

Beispiel Das nicht-kompensierbare Signal u_k sei normalverteilt und die Verteilungsdichtefunktion wird durch Geraden (Treppenfunktion) approximiert. Es wird der Binärcode unterstellt und es sei $\sigma_a = \sigma_u = 1$, $L = 32$. Nach (2.3-39) und (2.3-33) gilt :

$$W^* = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \exp\left(-\frac{1}{2}n^2q'^2\right)$$

$$S^* = -\frac{q^2q'}{\sqrt{2\pi}} \sum_n n^2 \exp\left(-\frac{1}{2}n^2q'^2\right)$$

$$E\{Q^2(u)\} = q^2 \sum_n \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \left[F_u((n+1)q') - F_u(nq')\right]$$

$$\text{dabei ist } F_u(\eta) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}(\eta/\sqrt{2})\right)$$

Für den Restfehler σ_∞ und die Norm gilt nach (2.3-41) :

$$\sigma_\infty^2 = \sqrt{2\pi} \frac{q_c L \sum_n \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \left[F_u((n+1)q') - F_u(nq')\right]}{\sum_n \exp\left(-\frac{1}{2}n^2q'^2\right) - q_c q' L \sum_n n^2 \exp\left(-\frac{1}{2}n^2q'^2\right)}$$

$$1 - \|T\|_I = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} q_c \left(\sum_n \exp\left(-\frac{1}{2}n^2q'^2\right) - q_c q' L \sum_n n^2 \exp\left(-\frac{1}{2}n^2q'^2\right) \right)$$

Die Ergebnisse für σ_∞ und $\|T\|_I$ sind in Bild 2.4 angegeben. Für $q' > 2$ entspricht die Q-Adaption fast genau der S-Adaption, d.h. außer bei 0 brauchen keine Sprungstellen realisiert zu werden. Offensichtlich ergibt die S-Adaption den kleinsten Restfehler. Die optimale Quantisierungskennlinie ist also die Sign-Funktion. Das ist ein sehr erfreuliches Ergebnis, da das am einfachsten zu realisierende Verfahren zugleich die besten Ergebnisse bringt ! Allerdings nimmt mit $q' \rightarrow \infty$ die Konvergenzgeschwindigkeit deutlich ab.

Diese Feststellungen gelten generell für alle nicht-kompensierbaren Signale mit Verteilungsdichtefunktionen ohne mehrere deutlich ausgeprägte Maxima. Bei deutlich bimodalen Verteilungen ist die S-Adaption allerdings deutlich schlechter, wie Abschnitt 2.4.2 noch zeigen wird. Bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit ist die S-Adaption jedoch generell die schlechteste Wahl.

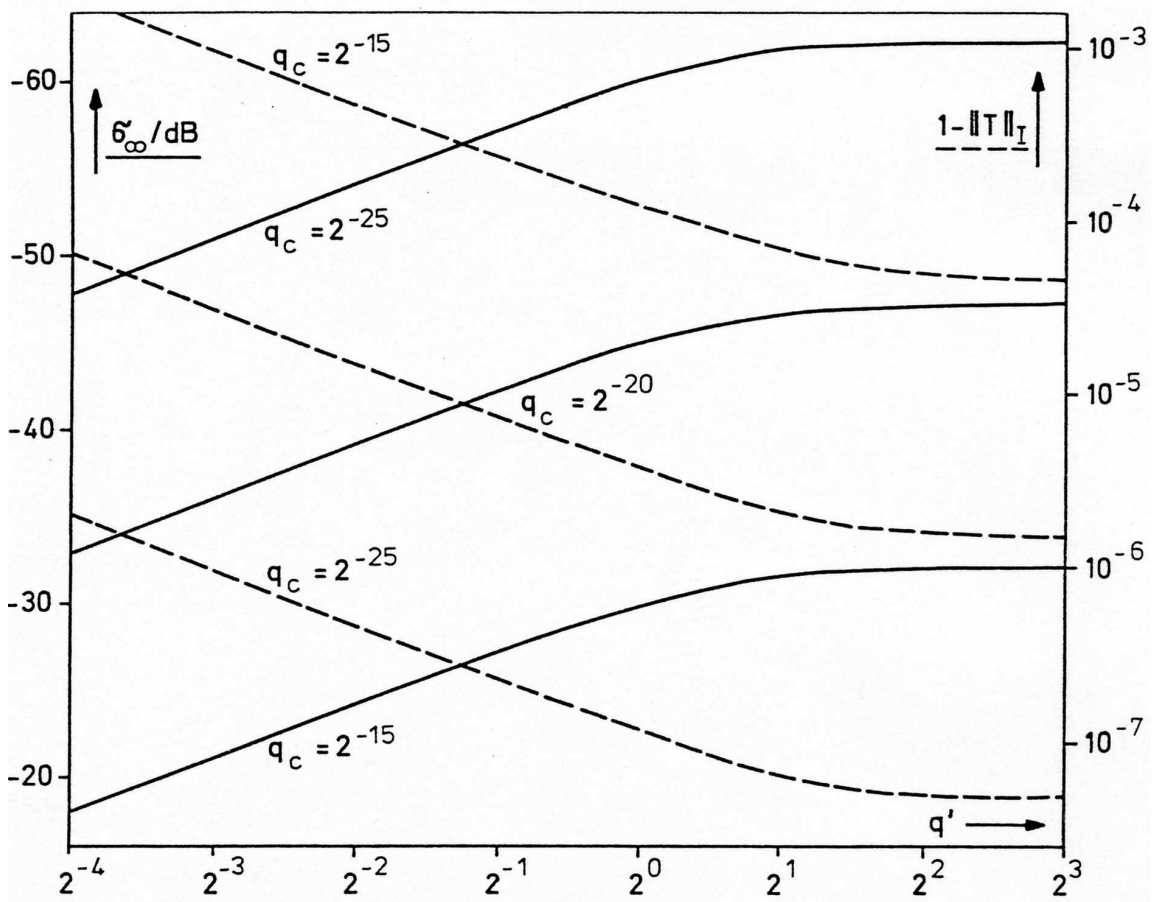


Bild 2.4: σ_∞ und $\|T\|_I$ als Funktion von q' für normalverteiltes Signal u_k mit $\sigma_u = \sigma_a = 1$, $L = 32$

2.4 Sign-Adaption (S-Adaption)

Wenn von der Verstellsinformation für das adaptive Filter nur das Vorzeichen ausgewertet wird, ergibt sich das Verfahren mit der einfachsten denkbaren Realisierung. Wegen seiner großen Bedeutung wird dieser Sonderfall der allgemeinen Q-Adaption hier nochmals ausführlich behandelt. Generell gilt hier $q_c = \alpha$ gemäß (2.3-3).

2.4.1 Restfehler und Konvergenzgeschwindigkeit

Da $S(\sigma) = L\sigma_a^2$ von σ unabhängig ist, ergeben sich enorme Vereinfachungen gegenüber der Q-Adaption. $W(\sigma)$ gemäß (2.3-23) vereinfacht sich ebenfalls. Der Term $W(\sigma)/\sigma_u$ kann als Funktion von $R = \sigma/\sigma_u$ dargestellt werden, was bei der Q-

Adaption nicht möglich ist. Aus (2.3-23c) folgt :

$$\frac{W(\sigma)}{\sigma_u} = -2R^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_\varphi(\eta) \cdot f_{u_N}(\eta R) d\eta \quad ; \quad R = \frac{\sigma}{\sigma_u} \quad (2.4-1)$$

Dem Adaptionsverfahren ist das gegenüber (2.3-15) vereinfachte Iterationsverfahren der Restsignal-Varianzen zugeordnet :

$$\left. \begin{aligned} v_{k+1} &= T(v_k) & ; & \quad v_k = \sigma_k^2 \\ T(v) &:= v - 2\alpha\sigma_a^2 W(\sqrt{v}) + \alpha^2 L\sigma_a^4 \end{aligned} \right\} \quad (2.4-2)$$

Für die Ableitung gilt :

$$T'(v) = 1 - \alpha\sigma_a^2 \frac{W'(\sqrt{v})}{\sqrt{v}} \quad (2.4-3)$$

Der Fixpunkt von T bzw. der Restfehler und die Norm von T bzw. die Konvergenzgeschwindigkeit werden durch einfache geschlossene analytische Ausdrücke erfaßt :

$$W(\sigma_\infty) = \frac{\alpha L\sigma_a^2}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma_\infty = W^{-1} \left(\frac{\alpha L\sigma_a^2}{2} \right) \quad (2.4-4a)$$

$$\|T\|_I = 1 - \alpha\sigma_a^2 \cdot \inf \left\{ \frac{W'(\sigma)}{\sigma} \mid \sigma^2 \in I \right\} \quad (2.4-4b)$$

Mit (2.4-1) wird nun folgende Beschreibung des Restfehlers gewonnen ($\alpha_u = \alpha/\sigma_u$) :

$$\frac{\alpha_u L\sigma_a^2}{2} = -2R_\infty^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_\varphi(\eta) \cdot f_{u_N}(\eta R_\infty) d\eta = \frac{W(\sigma_\infty)}{\sigma_u} \quad (2.4-5)$$

R_∞ ist also eine Funktion von α_u . Bei der K-Adaption ist R_∞ dagegen eine Funktion von α gemäß (2.2-30). Die Ursache dieses prinzipiellen Unterschiedes ist : Bei $R \ll 1$ ist die Größenordnung der Verstellinformation bei der K-Adaption proportional zu σ_u , während sie bei der S-Adaption unabhängig von σ_u ist.

Wenn die Verteilungsdichtefunktion f_u bei Null in eine Taylor-Reihe entwickelbar ist, so folgt aus (2.3-29) :

$$W(\sigma) = 2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2r+2}}{\sigma_u^{2r+1}} M_{2r} f_{u_N}^{(2r)}(0) \quad (2.4-6)$$

$$\frac{W'(\sigma)}{\sigma} = \frac{2}{\sigma_u} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2r}}{\sigma_u^{2r}} (2r+2) M_{2r} f_{u_N}^{(2r)}(0) \quad (2.4-7)$$

Für die EndEinstellung gilt mit (2.4-4a) und (2.4-6) :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_u L \sigma_a^2}{2} &= 2 \sum_{r=0}^{\infty} R_{\infty}^{2r+2} M_{2r} f_{u_N}^{(2r)}(0) \quad , \quad R_{\infty} = \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_u} \\ &= 2R_{\infty}^2 f_{u_N}(0) + R_{\infty}^4 f_{u_N}''(0) + \frac{1}{4} R_{\infty}^6 f_{u_N}^{(4)}(0) + \dots \end{aligned} \quad (2.4-8)$$

Für die EndEinstellung gilt $R_{\infty} \ll 1$ nach (2.2-11). Wenn $f_{u_N}(0)$ nicht wesentlich kleiner als $f_{u_N}''(0)$ ist kann somit die Taylor-Entwicklung nach $r = 0$ abgebrochen werden und es ergeben sich die wichtigsten Formeln dieser Arbeit. Es gilt wieder wie bei der K-Adaption die 3 dB – Regel (d.h. 1 Bit mehr für die Koeffizienten reduziert den Restfehler um 3 dB) :

Bei $f_{u_N}(0) \gg 0$ gilt :

$$R_{\infty}^2 = \alpha_u \frac{L \sigma_a^2}{4 f_{u_N}(0)} \quad (2.4-9a)$$

$$\|T\|_I = 1 - \alpha_u \sigma_a^2 4 f_{u_N}(0) \quad (2.4-9b)$$

Dies sind die einfachsten Formeln für die S-Adaption überhaupt und dennoch in den allermeisten praktischen Fällen anwendbar !

Bei $f_{u_N}(0) = 0$ und $f_{u_N}''(0) \gg 0$ kann (2.4-8) nach $r = 1$ abgebrochen werden und daraus ergibt sich direkt (2.4-10a), wie nachfolgend angegeben. Für die Norm gilt nach (2.4-7) und (2.4-4b) :

$$\begin{aligned} \|T\|_I &= 1 - \alpha \sigma_a^2 \cdot \inf \left\{ \frac{4}{\sigma_u} R^2 f_{u_N}''(0) \mid \sigma^2 \in I \right\} \\ &= 1 - \alpha_u \sigma_a^2 4 f_{u_N}''(0) \cdot \inf \left\{ \frac{v}{\sigma_u^2} \mid v \in I \right\} \end{aligned}$$

Sinnvollerweise wird das Intervall $I = [\sigma_{\infty}^2, \sigma_0^2]$ gewählt (σ_0 ist dabei belanglos, weil die niedrigste Konvergenzgeschwindigkeit bei σ_{∞} erreicht wird) und damit folgt :

$$\|T\|_I = 1 - \alpha_u \sigma_a^2 4 f_{u_N}''(0) \cdot R_{\infty}^2$$

Zusammenfassung ($\alpha_u = \alpha / \sigma_u$) :

Bei $f_{u_N}(0) = 0$ und $f_{u_N}''(0) \gg 0$ gilt :

$$R_{\infty}^2 = \sqrt{\alpha_u \frac{L \sigma_a^2}{2 f_{u_N}''(0)}} \quad (2.4-10a)$$

$$\|T\|_I = 1 - \alpha_u^{3/2} \sigma_a^2 4 \sqrt{\frac{L \sigma_a^2 f''_{u_N}(0)}{2}} \quad (2.4-10b)$$

In diesem Fall ist α_u proportional zu R_∞^4 und somit bewirkt 1 Bit eine Verringerung des Restfehlers um 1.5 dB.

Falls $f_{u_N}(0)$ nicht exakt bekannt ist, wird dadurch die Anwendung von (2.4-8) bzw. (2.4-9) kaum erschwert – zumindest dann nicht, wenn die Verteilung von u_k als unimodal bekannt ist und damit der erste Term in (2.4-8) dominiert. Dies wird belegt durch die in Bild 2.5 angegebenen (künstlichen) Verteilungen für f_{u_N} . Es bedeuten :

(a) Normalverteilung :

$$f_{u_N}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \quad ; \quad f_{u_N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.399$$

(b) Gleichmäßige Verteilung :

$$f_{u_N}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{12}} \text{rect}\left(\frac{\eta}{\sqrt{12}}\right) \quad ; \quad f_{u_N}(0) = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0.289$$

(c) Dreiecksverteilung :

$$f_{u_N}(\eta) = \max\left\{\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{|\eta|}{6}, 0\right\} \quad ; \quad f_{u_N}(0) = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0.408$$

Ungeachtet der in Bild 2.5 verdeutlichten enormen Unterschiede in der Form der Verteilungsdichtefunktionen sind die Unterschiede an der Stelle 0 gering. Der Unterschied zwischen der gleichmäßigen Verteilung und der Dreiecksverteilung in der Auswirkung auf R_∞ beträgt nur $10 \cdot \log(0.408/0.289) = 1.5$ dB. Offensichtlich liefert unter allen unimodalen Verteilungen die gleichmäßige Verteilung den kleinsten Wert $f_{u_N}(0)$. In Bild 2.5 ist zum Vergleich auch noch eine bimodale Dreiecksverteilung angegeben (siehe auch Bild 5.2 für reale Verteilungen) :

(d) Bimodale Dreiecksverteilung (wie bei (c) existiert bei 0 keine Taylor-Entwicklung) :

$$f_{u_N}(\eta) = \max\left\{\frac{1}{2c} - \frac{||\eta| - c|}{2c^2}, 0\right\} \quad \text{mit} \quad c = \sqrt{\frac{6}{7}}$$

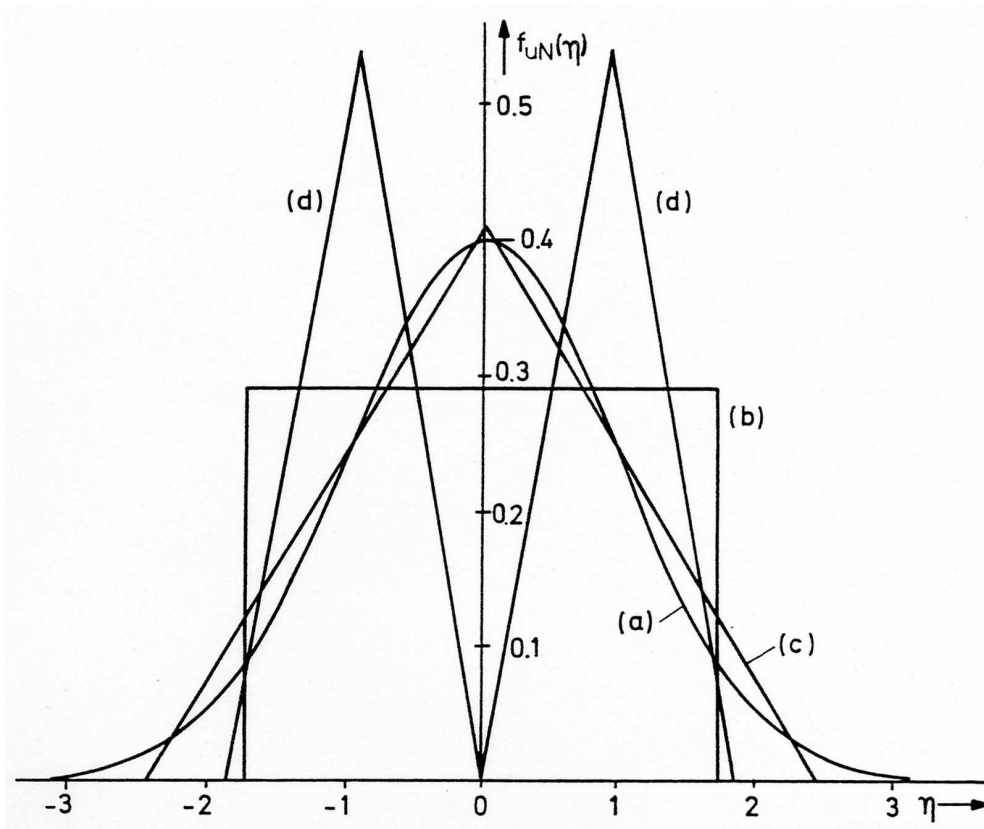


Bild 2.5: Spezielle auf Varianz 1 normierte Verteilungen

2.4.2 Beispiele mit künstlichen Verteilungen

In Bild 2.6 erfolgt ein Vergleich verschiedener künstlicher Verteilungen für das nicht-kompensierbare Signal bezüglich des normierten Restfehlers R_∞ und der durch $\|T\|_I$ charakterisierten Konvergenzgeschwindigkeit. Dabei wird $\alpha_u L \sigma_a^2 = q_c L \sigma_a^2 / \sigma_u$ als Parameter gewählt. Für $R_\infty > -10$ dB sind keine Ergebnisse angegeben, da Näherungen wie bereits erläutert nur für kleines R_∞ gelten.

Soweit nichts gegenteiliges vermerkt ist, wird für alle Rechnungen zu den Kurven (a) bis (g) das Restsignal als exakt normalverteilt unterstellt, so daß (2.3-21) verwendet werden kann. Es folgen Erläuterungen zu den einzelnen Kurven :

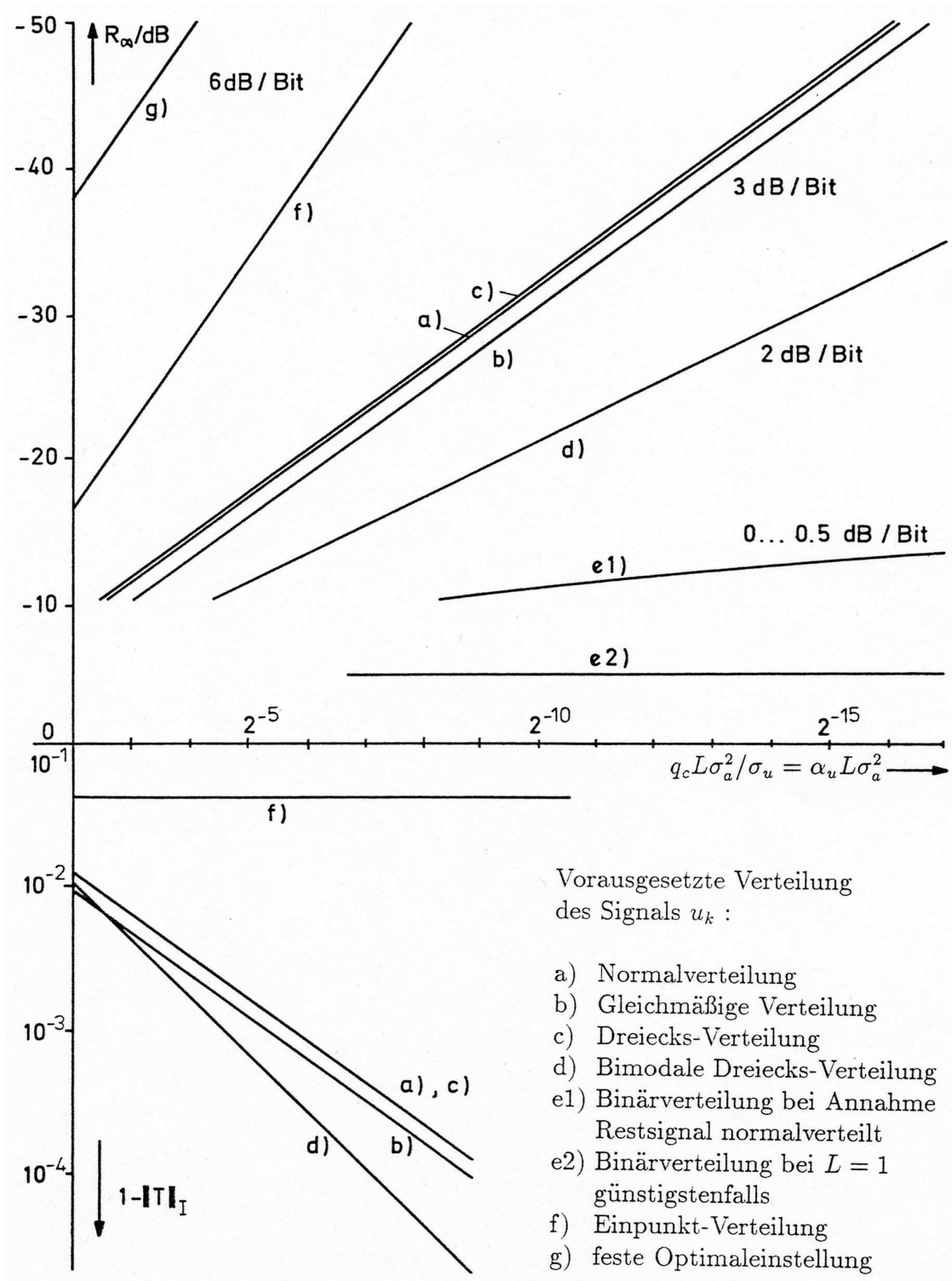


Bild 2.6: Spezielle auf Varianz 1 normierte Verteilungen

(a) **Normalverteilung** Aus (2.4-5) folgt

$$\begin{aligned}\alpha_u L \sigma_a^2 &= 4R_\infty^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2 R_\infty^2}{2}\right) d\eta \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{R_\infty^2}{\sqrt{1+R_\infty^2}} \approx 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} R_\infty^2\end{aligned}\quad (2.4-11)$$

Die Näherung entspricht genau (2.4-8) mit Abbruch nach $r = 0$. Nach (2.4-9b) gilt $\|T\|_I \approx 1 - \alpha_u \sigma_a^2 2\sqrt{2/\pi}$.

(b) **Gleichmäßige Verteilung** ähnliche Methoden wie bei (a)

(c) **Dreiecksverteilung** ähnliche Methoden wie bei (a)

(d) **Bimodale Dreiecksverteilung** ähnliche Methoden wie bei (a)

(e) **Binärverteilung** (Zweipunkt-Verteilung) : Für die Verteilungsdichtefunktion gilt hier $f_{u_N}(\eta) = [\delta(\eta - 1) + \delta(\eta + 1)]/2$. Bei dieser diskreten Verteilung wie auch bei der nachfolgend behandelten Einpunkt-Verteilung ist Satz 2.2 über die Konvergenz nicht anwendbar. Aus (2.4-5) folgt die Gleichung

$$\alpha_u L \sigma_a^2 = -2R_\infty \left(h_\varphi\left(\frac{1}{R_\infty}\right) + h_\varphi\left(-\frac{1}{R_\infty}\right) \right) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} R_\infty \exp\left(-\frac{1}{2R_\infty^2}\right) \quad ,$$

die (numerisch) nach R_∞ auflösbar ist und in Bild 2.6 als e1-Kurve bezeichnet ist. Offensichtlich gilt $R_\infty \rightarrow 0$ für $\alpha_u \rightarrow 0$. In Abschnitt 3.3.3 wird jedoch für $L = 1$ gezeigt, daß stets $R_\infty^2 > 1/3$ für beliebiges α_u gilt (e2-Kurve) und das Restsignal eine diskrete gleichmäßige Verteilung hat. Also führt die Annahme eines normalverteilten Restsignals bei der diskreten Verteilung von u_k in diesem Beispiel zu völlig falschen Ergebnissen.

(f) **Kein Signal** ($u_k \equiv 0$, Einpunkt-Verteilung) : Hier gilt $f_u(u) = \delta(u)$ und wegen $\sigma_u = 0$ ist f_{u_N} nicht definiert. Mit einem fiktiven σ_u folgt aus (2.4-5) die in Bild 2.6 dargestellte Kurve :

$$\alpha_u L \sigma_a^2 = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} R_\infty$$

In Abschnitt 3.3.3 wird für $L = 1$ und $\sigma_a^2 = 1$ exakt $\sigma_\infty = \alpha/\sqrt{2}$ gezeigt, womit sich das obige Ergebnis als ziemlich genau erweist.

(g) **Feste Optimaleinstellung** Aus (2.3-5) und $q_c = \alpha$ gemäß (2.3-3) folgt $R_\infty^2 = \alpha_u^2 L \sigma_a^2 / 12$

Kommentar zu den Kurven aus Bild 2.6 : Die "Normalfälle" (a),(b),(c) unterscheiden sich kaum – bei "vernünftigen" unimodalen Verteilungen ist $f_{u_N}(0)$ also ohne

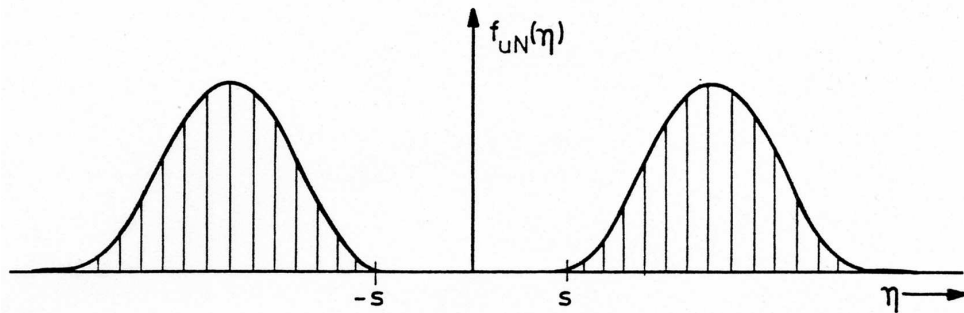


Bild 2.7: Eine für die S-Adaption besonders ungünstige Verteilungsdichtefunktion f_u

wesentlichen Einfluß. Der Sonderfall (d) ist sowohl bezüglich des Restfehlers wie der Konvergenzgeschwindigkeit deutlich schlechter.

Die Ein- und Zweipunkt-Verteilung markieren die Extremfälle. Der günstigste Fall ist natürlich $\sigma_u = 0$ und der Abstand zur festen Optimaleinstellung beträgt dann nur 3.6 Bit bzw. 21.6 dB. Die ungünstigste Verteilung überhaupt ist offensichtlich die Binär-Verteilung, die gegenüber (d) sehr stark abfällt. Zumindest für $L = 1$ liegt die tatsächliche Kurve unterhalb der e2-Kurve. Die unter der falschen Annahme eines normalverteilten Restsignals gerechnete e1-Kurve liegt mindestens 5 bis 10 dB zu günstig.

Es sind natürlich auch weitere Beispiele möglich, die einen stetigen Übergang zwischen den Kurven aus Bild 2.6 vermitteln. Wenn z.B. $f_{u_N}(0) \approx 0$ gilt, müssen sowohl $f_{u_N}(0)$ wie auch $f_{u_N}''(0)$ berücksichtigt werden, wobei die entstehende Kurve dann keine Gerade mehr ist und der Wert von $f_{u_N}(0)$ sehr empfindlich einget.

An dieser Stelle wird jetzt nochmals anschaulich erklärt, warum die S-Adaption in besonderer Weise von der Amplituden-Verteilungsdichtefunktion des nicht-kompensierbaren Signals abhängig ist. Um es ganz deutlich zu machen, wird $f_{u_N}(\eta) = 0$ für $|\eta| < s$ vorausgesetzt, wie das in Bild 2.7 symbolisch dargestellt ist. Dabei gilt näherungsweise $\sigma_k \approx 3s$. Es wird sich noch zeigen, daß derartige Verteilungen keinesfalls unreal sind, sondern tatsächlich in der Praxis auftreten können.

Es kann nun einfach gezeigt werden, daß die Restsignal-Streuung σ_k nicht wesentlich kleiner als s werden kann, d.h. σ_k wird auch nicht wesentlich kleiner als σ_u und somit wird das übliche Ziel gemäß (2.2-11) nicht erreicht.

Der Nachweis wird dadurch geführt, daß die gegenteilige Annahme als falsch nachgewiesen wird. Es wird also $\sigma_k \ll s$ angenommen. Dann ist u_k in $u_k + \varphi_k$ dominierend und somit werden $\text{sign}(u_k + \varphi_k)$ und $\text{sign}(u_k)$ meistens den gleichen Wert annehmen.

Für die Komponenten des Gradientenvektors $\nabla_k = \mathbf{a}_k \text{sign}(u_k + \varphi_k)$ gilt :

$$\begin{aligned} E\{\nabla_{k,i}\} &= E\{a_{k-i} \text{sign}(u_k + \varphi_k)\} \approx E\{a_{k-i} \text{sign}(u_k)\} \\ &= E\{a_{k-i}\} \cdot E\{\text{sign}(u_k)\} = 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$E\{\nabla_{k,i}^2\} = E\{a_{k-i}^2\} = \sigma_a^2$$

Die Aufdatierung eines Adaptionsverfahrens mit einem Gradientenvektor, der zwar mittelwertfrei ist, aber eine Varianz ungleich Null hat und von der aktuellen Koeffizienten-Einstellung unbeeinflusst ist, führt mit Sicherheit zur Divergenz des Adaptionsverfahrens. Somit wird die Varianz des Restsignals immer größer und die Annahme $\sigma_k \ll s$ wird falsch. Also wird σ_k allenfalls bis in die Größenordnung von s reduziert.

2.4.3 Vergleich mit dem Stand der Technik

Die Ergebnisse zur K-Adaption sind wohlbekannt [3.] - [4.].

Alle unter [4.] aufgeführten Arbeiten beschränken sich auf die S-Adaption bzw. auf 3-stufige Quantisierungskennlinien. Ferner werden die a_k als unkorreliert oder statistisch unabhängig vorausgesetzt – korrelierte a_k werden nur im Zusammenhang mit der K-Adaption behandelt.

Die Bedeutung der Amplituden-Verteilungsdichtefunktion des nicht-kompensierbaren Signals an der (den) Sprungstelle(n) der Quantisierungskennlinie wird nur in [4.1], [4.4], [4.7] und [4.10] erkannt. Ansonsten werden einfach Normalverteilungen für das nicht-kompensierbare Signal unterstellt, wobei sich je nach den tatsächlichen Verhältnissen extreme Fehler ergeben können. Auch die Modellierung von Q durch Addition eines von der Verstellsinformation unabhängigen Störsignals ist schon deshalb völlig falsch, weil dann die verschiedenen Kurven aus Bild 2.6 alle zusammenfallen.

Ein Ansatz zur analytischen Erfassung der Q-Adaption findet sich in [4.9] für eine (gegenüber den Treppenfunktionen) verallgemeinerte Klasse von Funktionen Q .

Die weitestgehenden Ergebnisse sind in [4.1] und [4.4] enthalten, wobei die Untersuchungen sowohl dort wie in dieser Arbeit durch die Notwendigkeit ausgelöst wurden, volldigitale Voll-Duplex-Basisbandempfänger für die Integration möglichst exakt zu dimensionieren. [4.1] und [4.4] beschränken sich auf die S-Adaption. Es wird die Funktion W eingeführt und R_∞ und $\|T\|_I$ werden für die Kurven (a), (b), (e) aus Bild 2.6 berechnet. Das Konzept der Taylor-Entwicklung an der (den) Sprungstelle(n) wird jedoch nicht verwendet und damit fehlen die elementaren Formeln für R_∞ und $\|T\|_I$ in Abhängigkeit von $f_{u_N}(0)$, $f''_{u_N}(0)$, ... Es wird festgestellt, daß die die e1-Kurve aus Bild 2.6 den Beobachtungen der Praxis widerspricht.

Neu in den Abschnitten 2.3 und 2.4 sind insbesondere folgende Ergebnisse : Die Analyse der Funktion W für die allgemeine Q-Adaption; die Analyse der Funktion S ; der allgemeine Konvergenzbeweis von Satz 2.2; die Darstellung des Restfehlers und der Konvergenzgeschwindigkeit mit dem Konzept der Taylor-Entwicklung; die Optimierung der Quantisierungskennlinie und die Ergebnisse von Abschnitt 2.3.6.

2.5 Der Einfluß von stark korrelierten Leitungscodes

Alle bisher in Kapitel 2 abgeleiteten Ergebnisse wurden unter der Voraussetzung (2.1-8) unkorrelierter Sendewerte gewonnen. Bei vielen Anwendungen werden jedoch Leitungscodes verwendet, die diese Voraussetzung nicht erfüllen : Weit verbreitet sind beispielsweise der AMI-Code als Partial-Response-Code mit starken Korrelationen oder der bei der ISDN-Übertragungstechnik verwendete MMS43-Blockcode vom 4B3T-Typ mit relativ schwachen Korrelationen.

In diesem Abschnitt wird nun der Einfluß dieser Korrelationen auf das Adaptionsverfahren, den Restfehler und die Konvergenzgeschwindigkeit untersucht. Dabei wird neben der K-Adaption nur die S-Adaption behandelt.

Das Hauptergebnis in beiden Fällen wird sein, daß der Restfehler kaum, die Konvergenzgeschwindigkeit jedoch sehr stark durch die Korrelationen des Leitungscodes beeinflusst wird.

2.5.1 Allgemeine Autokorrelationsmatrizen

Die Grundidee zur Untersuchung der Adaption bei korrelierten Leitungscodes besteht darin, in der Gleichung (2.2-12) der stochastischen Rekursion eine lineare Transformation derart durchzuführen, daß die transformierten Sendewerte unkorreliert sind.

Die Transformation basiert auf den Eigenvektoren der in (2.1-9) definierten (L, L) -dimensionalen Autokorrelationsmatrix $\Phi_{aa} = E\{\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T\}$. Die Eigenwert-Zerlegung von Φ_{aa} wird geschrieben als :

$$\Phi_{aa} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^T \quad (2.5-1)$$

$$\text{mit } \mathbf{\Lambda} = \text{Diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{L-1}) \quad ; \quad \lambda_i > 0$$

$$\mathbf{V} = (L, L) - \text{dim. Orthogonalmatrix} \quad (\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{E})$$

In der Diagonalen von Φ_{aa} stehen die Werte $\sigma_a^2 = E\{a_k^2\}$. Im unkorrelierten Fall ist Φ_{aa} eine reine Diagonalmatrix, d.h. $\Phi_{aa} = \mathbf{\Lambda} = \sigma_a^2 \mathbf{E}$, $\mathbf{V} = \mathbf{E}$, $\lambda_i = \sigma_a^2$, wobei \mathbf{E} die

Einheitsmatrix sein soll. Allgemein gilt :

$$\sum_{i=0}^{L-1} \lambda_i = \text{Spur}(\mathbf{A}) = \text{Spur}(\mathbf{\Phi}_{aa}) = L\sigma_a^2 \quad (2.5-2)$$

Es werden die Transformationen

$$\tilde{\mathbf{a}}_k = \mathbf{V}^T \mathbf{a}_k \quad ; \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{V}^T \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (2.5-3)$$

verwendet, die zu folgenden Eigenschaften führen :

$$E\{\tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T\} = \mathbf{A} \quad \implies \quad \tilde{\mathbf{a}}_k \text{ hat unkorrelierte Komponenten} \quad (2.5-4a)$$

$$E\{\|\mathbf{a}_k\|^2\} = E\{\|\tilde{\mathbf{a}}_k\|^2\} = \text{Spur}(\mathbf{\Phi}_{aa}) = L\sigma_a^2 \quad (2.5-4b)$$

$$\varphi_k = \mathbf{a}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k = \tilde{\mathbf{a}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \quad (2.5-4c)$$

Mit der symmetrischen (L, L) -dim. Matrix

$$\mathbf{Z}_k = E\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^T\} \quad (2.5-5)$$

gilt für die Restsignal-Varianz :

$$\sigma_k^2 = D^2\{\varphi_k\} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{\Phi}_{aa} \boldsymbol{\varepsilon}_k\} = E\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^T \mathbf{A} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k\} = \text{Spur}(\mathbf{Z}_k \mathbf{A}) \quad (2.5-6)$$

2.5.2 K-Adaption

Aus (2.2-16) folgt für den Vektor der mittleren Koeffizienten-Fehleinstellung :

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}\} = (\mathbf{E} - \alpha \mathbf{V} \mathbf{A} \mathbf{V}^T)^{k+1} E\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} = \mathbf{V} (\mathbf{E} - \alpha \mathbf{A})^{k+1} \mathbf{V}^T E\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} \quad (2.5-7)$$

Die Konvergenz der Erwartungswerte erfordert $|1 - \alpha\lambda_i| < 1$ für $0 \leq i \leq L - 1$, d.h. $\alpha < \alpha_{\max} = 2/\lambda_{\max}$ anstelle von (2.2-17). Für die Konvergenz der 2.Momente und für (2.2-11) muß α jedoch wesentlich kleiner gewählt werden.

2.5.2.1 Restfehler

Mit relativ einfachen Mitteln können grobe Abschätzungen für den Restfehler und die Konvergenzgeschwindigkeit angegeben werden [3.12]. Diese Ergebnisse sind jedoch für die Zwecke dieser Arbeit viel zu ungenau. Der Restfehler und im nächsten Abschnitt dann die Konvergenzgeschwindigkeit werden nun mit etwas mehr Aufwand sehr genau berechnet. Dieser Abschnitt folgt teilweise der Darstellung aus [1.2,§7.1].

Durch Verwendung der transformierten Zufallsvektoren gemäß (2.5-3) wird (2.2-12) und (2.2-13) überführt in :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k+1} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k - \alpha \tilde{\mathbf{a}}_k (u_k + \varphi_k) \quad (2.5-8)$$

$$= (\mathbf{E} - \alpha \tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k - \alpha \tilde{\mathbf{a}}_k u_k \quad (2.5-9)$$

Eine eindimensionale Rekursion der Restsignal-Varianzen σ_k^2 wie bei unkorrelierten Leitungscodes ist jetzt nicht mehr möglich, d.h. σ_{k+1}^2 kann nicht allein aus σ_k^2 berechnet werden. Nach (2.5-6) kann jedoch σ_k^2 aus der Matrix \mathbf{Z}_k berechnet werden und für diese (L, L) -dim. Matrizen ist eine Matrix-Rekursion möglich, die direkt aus (2.5-9) folgt :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{k+1} &= E\{(\mathbf{E} - \alpha \tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^T (\mathbf{E} - \alpha \tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T) + \alpha^2 \tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T u_k^2\} \\ &= \mathbf{Z}_k - \alpha (\mathbf{Z}_k \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{Z}_k) + \alpha^2 \mathbf{W}_k + \alpha^2 \sigma_u^2 \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2.5-10)$$

$$\text{mit } \mathbf{W}_k = E\{\tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T \mathbf{Z}_k \tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T\} \quad (2.5-11)$$

Der nächste Satz gibt an, wie \mathbf{W}_k in relativ einfacher Weise aus \mathbf{Z}_k und \mathbf{A} berechnet werden kann :

Satz 2.3 Mit $\vartheta = \frac{E\{\tilde{a}_i^4\}}{E^2\{\tilde{a}_i^2\}}$ gilt für die Matrix \mathbf{W}_k :

$$\mathbf{W}_k = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{A} \cdot \text{Spur}(\mathbf{Z}_k \mathbf{A}) + (\vartheta - 1) \mathbf{A} \mathbf{Z}_k \mathbf{A} & \text{auf der Diagonalen} \\ 2 \cdot \mathbf{A} \mathbf{Z}_k \mathbf{A} & \text{neben der Diagonalen} \end{array} \right\} \quad (2.5-12)$$

$$= \mathbf{A} \cdot \text{Spur}(\mathbf{Z}_k \mathbf{A}) + 2 \cdot \mathbf{A} \mathbf{Z}_k \mathbf{A} \quad \text{für } \vartheta = 3 \quad (2.5-13)$$

Der Beweis dieses Satzes wird in Abschnitt A.6 gegeben.

Natürlich ist \mathbf{W}_k von den 4.Momenten des Leitungscodes abhängig, die aber nur über die Größe ϑ in das Ergebnis eingehen. ϑ ist zwar unabhängig von σ_a (d.h. dimensionslos), aber der exakte Wert ist vom speziellen Leitungscodes abhängig. Für den Binärcode gilt zwar exakt $\vartheta = 1$, aber ansonsten erscheint die Annahme $\vartheta = 3$ vernünftiger (siehe Abschnitt A.6). Die beiden Alternativen $\vartheta = 1$ oder $\vartheta = 3$ sind wohlbekannt [4.4]. Das Ergebnis dieses Satzes findet sich in [1.2, Problem 7.6]. (2.5-13) ist in [3.18] angegeben. In [3.8] und [3.13] wird $\vartheta = 1$ gesetzt. Es wird sich jedoch noch zeigen, daß ϑ eine ähnlich untergeordnete Bedeutung wie die Größe ϱ aus (2.2-21) hat.

Aus Satz 2.3 ergibt sich mit $\mathbf{Z}_k = \mathbf{E}$ die Folgerung :

$$E\{\tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T \tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T\} = \mathbf{A} \cdot \text{Spur}(\mathbf{A}) + (\vartheta - 1)\mathbf{A}^2 \quad (\text{ist diagonal}) \quad (2.5-14a)$$

$$= (L + \vartheta - 1)\sigma_a^4 \cdot \mathbf{E} \quad \text{mit (2.1-8)} \quad (2.5-14b)$$

Speziell für den Binärcode kann die linke Seite von (2.5-14a) wegen $\tilde{\mathbf{a}}_k^T \tilde{\mathbf{a}}_k = L\sigma_a^2$ auch direkt berechnet werden :

$$E\{\tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T \tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T\} = L\sigma_a^2 \cdot E\{\tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T\} = L\sigma_a^2 \cdot \mathbf{A} = L\sigma_a^4 \cdot \mathbf{E} \quad (2.5-14c)$$

Somit liefert die Annahme $\vartheta = 3$ auch bei binären a_k nur einen geringen Fehler – zumindest bei $L \gg 1$. Die Ergebnisse (2.5-14b) und (2.5-14c) bedeuten also nur einen scheinbaren Widerspruch. Dieser Effekt ist wohlbekannt [4.4].

Es soll noch der Zusammenhang von ϑ mit ϱ aus (2.2-21) geklärt werden. Nach Satz 2.3 folgt (für einen beliebigen Leitungscode) :

$$\begin{aligned} E\{\|\mathbf{a}_k\|^2 \varphi_k^2\} &= E\{\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^T \varepsilon_k \varepsilon_k^T \mathbf{a}_k\} = \text{Spur}(E\{\tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T \mathbf{Z}_k \tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T\}) \\ &= \text{Spur}(\mathbf{A})\text{Spur}(\mathbf{Z}_k \mathbf{A}) + (\vartheta - 1)\text{Spur}(\mathbf{A}^2 \mathbf{Z}_k) \end{aligned}$$

Für unkorrelierte Leitungscode gilt $\mathbf{A} = \sigma_a^2 \mathbf{E}$ und mit (2.5-6) folgt :

$$E\{\|\mathbf{a}_k\|^2 \varphi_k^2\} = L\sigma_a^2 \sigma_k^2 + (\vartheta - 1)\sigma_a^2 \sigma_k^2$$

Insgesamt ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen ϑ und ϱ für unkorrelierte Leitungscode :

$$\varrho = \frac{E\{\|\mathbf{a}_k\|^2 \varphi_k^2\}}{L\sigma_a^2 \sigma_k^2} = \frac{L + \vartheta - 1}{L} \approx 1 \quad (2.5-15)$$

Nach diesen einfachen Folgerungen aus Satz 2.3 wird (2.5-12) nun in (2.5-10) eingesetzt und ergibt eine wichtige Rekursion für \mathbf{Z}_k :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{k+1} &= \mathbf{Z}_k - \alpha (\mathbf{Z}_k \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{Z}_k) \\ &+ \alpha^2 \left(\mathbf{A} \cdot (\text{Spur}(\mathbf{Z}_k \mathbf{A}) + \sigma_u^2) + \left\{ \begin{array}{c} \vartheta - 1 \\ 2 \end{array} \right\} \mathbf{A} \mathbf{Z}_k \mathbf{A} \right) \end{aligned} \quad (2.5-16)$$

In der geschweiften Klammer gilt der obere Wert für die Diagonalelemente von \mathbf{Z}_{k+1} und der untere Wert gilt sonst. Wenn nun \mathbf{Z}_k eine Diagonalmatrix wäre, so wäre auch \mathbf{Z}_{k+1} eine Diagonalmatrix, d.h. (2.5-16) ist eine Diagonalstruktur-erhaltende Rekursion (und ebenso positiv definit erhaltend). Es ist also zu vermuten, daß \mathbf{Z}_k gegen eine Diagonalmatrix konvergiert. Dies wird nun im nächsten Satz gezeigt, der zugleich das Hauptergebnis zum Restfehler enthält :

Satz 2.4 Für ein hinreichend klein gewähltes α existiert $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{Z}_k$ und ist eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen :

$$Z_{\infty,i,i} = \frac{\alpha \sigma_u^2}{2 - \alpha J(\alpha)} \cdot \frac{1}{1 - \alpha \frac{\vartheta-1}{2} \lambda_i} \quad (2.5-17)$$

Dabei wurde abkürzend gesetzt :

$$J(\alpha) = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\lambda_i}{1 - \alpha \frac{\vartheta-1}{2} \lambda_i} \quad (2.5-18)$$

Ferner gilt für den Restfehler folgendes Ergebnis :

$$\sigma_{\infty}^2 = \frac{\alpha J(\alpha)}{2 - \alpha J(\alpha)} \sigma_u^2 \quad (2.5-19)$$

Beweis Für $i \neq j$ gilt nach (2.5-16)

$$\begin{aligned} Z_{k+1,i,j} &= Z_{k,i,j} - \alpha(Z_{k,i,j} \lambda_j + \lambda_i Z_{k,i,j}) + 2\alpha^2 \lambda_i Z_{k,i,j} \lambda_j \\ &= (1 - \alpha(\lambda_i + \lambda_j) + 2\alpha^2 \lambda_i \lambda_j)^{k+1} \cdot Z_{0,i,j} \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines α ist die Klammer betraglich kleiner als 1 und es gilt $Z_{k,i,j} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ bei $i \neq j$. Für die Hauptdiagonale gilt nach (2.5-16) mit (2.5-6) :

$$Z_{k+1,i,i} = (1 - 2\alpha \lambda_i + \alpha^2 (\vartheta - 1) \lambda_i^2) Z_{k,i,i} + \alpha^2 \lambda_i (\sigma_k^2 + \sigma_u^2)$$

Für $k \rightarrow \infty$ folgt :

$$Z_{\infty,i,i} = \frac{\alpha(\sigma_{\infty}^2 + \sigma_u^2)}{2 - \alpha(\vartheta - 1)\lambda_i} \quad (2.5-20)$$

Hieraus folgt mit (2.5-18)

$$\sigma_{\infty}^2 = \sum_{i=0}^{L-1} \lambda_i Z_{\infty,i,i} = \frac{\alpha}{2} (\sigma_{\infty}^2 + \sigma_u^2) J(\alpha) \quad (2.5-21)$$

und daraus folgen sofort (2.5-19) und damit dann (2.5-17). Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Offensichtlich gilt die Näherung

$$J(\alpha) \approx J(0) = \text{Spur}(\mathbf{A}) = L\sigma_a^2 \quad \text{für} \quad \alpha \ll \frac{1}{\lambda_{\max}} \quad (2.5-22)$$

Code :		$\frac{\lambda_{\min}}{\sigma_a^2}$	$\frac{\lambda_{\max}}{\sigma_a^2}$	$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$	$\frac{J(\alpha = 2^{-6})}{J(\alpha = 0)}$ bei $\sigma_a^2 = 1$
Binär	L beliebig	1	1	1	1.016
MMS43	$L = 4$	0.567	1.277	2.3	1.017
	$L = 8$	0.362	1.294	3.6	1.017
	$L = 16$	0.207	1.302	6.3	1.017
	$L = 32$	0.136	1.306	9.6	1.018
AMI	$L = 4$	0.191	1.809	9.5	1.022
	$L = 8$	0.060	1.940	32.1	1.023
	$L = 16$	0.017	1.983	116.5	1.024
	$L = 32$	0.005	1.995	440.7	1.024

Tabelle 2.1: Der Einfluß des Leitungscodes auf die Eigenwerte der Autokorrelationsmatrix für $L = 4, 8, 16, 32$

mit Gleichheit bei $\alpha = 0$ und daraus ergibt sich die

Folgerung Für $\alpha \ll 1/\lambda_{\max}$ sind die Werte $J(\alpha)$ und R_∞ unabhängig von den Korrelationseigenschaften des Leitungscodes (2.5-23)

Tabelle 2.1 zeigt Eigenwerte der Autokorrelationsmatrix für einige wichtige Leitungscodes. Der AMI-Code hat eine wesentlich stärkere Eigenwert-Spreizung als der MMS43-Code und die Autokorrelationsmatrix des AMI-Codes wird für größeres L sogar fast singulär. Winzige (numerische) Störungen in der Autokorrelationsmatrix führen hier zu erheblichen Änderungen in der Eigenwert-Spreizung. In der rechten Spalte wird $J(\alpha)$ exakt nach der Definition (2.5-18) mit $\vartheta = 3$ für $\alpha = 2^{-6}$ und $\alpha = 0$ berechnet. Als Ergebnis erweist sich die Näherung (2.5-22) als vernünftig und der verschwindend kleine Einfluß der Korrelationen auf den Restfehler wird deutlich.

2.5.2.2 Konvergenzgeschwindigkeit

Ziel ist jetzt eine möglichst genaue Berechnung der Konvergenzgeschwindigkeit. Dieses Thema bildet mit vielen Veröffentlichungen in den letzten Jahren einen Schwerpunkt im Bereich der Gradienten-Adaptionsverfahren. Die wichtigsten Ergebnisse werden in diesem Abschnitt nun in einfacher Weise dargestellt und zusammengefaßt. Dabei zeigt sich, daß eine ähnliche Kennzeichnung der Konvergenzgeschwindigkeit wie bei unkorrelierten Leitungscodes mit nur einem Parameter hier nicht mehr möglich ist. Dennoch können einfache Formeln angegeben werden, mit denen der aktuelle Restfehler sehr genau berechnet werden kann.

Im Vektor $\mathbf{z}_k = (Z_{k,0,0}, \dots, Z_{k,L-1,L-1})^T$ werden die Diagonalelemente von \mathbf{Z}_k zusammengefaßt. Auch wenn \mathbf{Z}_k keine Diagonalmatrix ist, hängt \mathbf{z}_{k+1} nur von \mathbf{z}_k ab. Wegen (2.5-6) sind die Elemente außerhalb der Diagonalen von \mathbf{Z}_k irrelevant, was natürlich mit dem ersten Teil von Satz 2.4 harmoniert. Nach (2.5-16) folgt mit $\vartheta = 3$:

$$\mathbf{z}_{k+1} = (\mathbf{E} - 2\alpha\mathbf{A} + 2\alpha^2\mathbf{A}^2)\mathbf{z}_k + \alpha^2(\sigma_k^2 + \sigma_u^2)\boldsymbol{\lambda} \quad (2.5-24)$$

Dabei wurde $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{L-1})^T$ gesetzt. Zusammen mit

$$\sigma_k^2 = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{z}_k \quad (2.5-25)$$

bildet dies eine Rekursion, die man auch so schreiben kann :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \underbrace{(\mathbf{E} - 2\alpha\mathbf{A} + 2\alpha^2\mathbf{A}^2 + \alpha^2\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T)}_{\mathbf{F} = \mathbf{A}^* + \alpha^2\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T} \mathbf{z}_k + \alpha^2\sigma_u^2\boldsymbol{\lambda} \\ &= \mathbf{F} \mathbf{z}_k + \alpha^2\sigma_u^2\boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (2.5-26)$$

Dabei wird

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \mathbf{E} - 2\alpha\mathbf{A} + 2\alpha^2\mathbf{A}^2 = \text{Diag}(\lambda_i^*) \\ \lambda_i^* &= 1 - 2\alpha\lambda_i + 2\alpha^2\lambda_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.5-27)$$

gesetzt. Für kleines α ist die Approximation $\mathbf{A}^* \approx \mathbf{E} - 2\alpha\mathbf{A}$ zulässig (Näherung in der Diagonalen). Die naheliegende Approximation $\mathbf{F} \approx \mathbf{A}^*$ (Näherung durch eine Diagonalmatrix) wird noch erörtert. Im Gegensatz zu (2.5-24) ist in (2.5-26) der von \mathbf{z}_k unabhängige Anteil auch von k unabhängig – aber dafür wird \mathbf{z}_k nicht mehr mit einer Diagonalmatrix bewertet. In der Literatur [1.2], [1.7], [3.13], [3.15], [3.16], [3.18] gibt es noch viele ähnliche Darstellungen, die aber nicht auf eine 1-dimensionale Rekursion der Form $\sigma_{k+1}^2 = T(\sigma_k^2)$ reduziert werden können. σ_{k+1}^2 kann also nicht direkt aus σ_k^2 berechnet werden. Relativ wertlos sind offensichtlich Ausdrücke für die stark von der Anfangs-Koeffizienten-Einstellung abhängige initiale Konvergenzgeschwindigkeit, die durch σ_1^2/σ_0^2 gekennzeichnet ist [3.17]. Um σ_k^2 aber doch geschlossen aus der Anfangs-Koeffizienten-Einstellung berechnen zu können, sind weitere Überlegungen notwendig :

Aus (2.5-26) mit $k \rightarrow \infty$ folgt $\mathbf{z}_\infty - \mathbf{F}\mathbf{z}_\infty = \alpha^2\sigma_u^2\boldsymbol{\lambda}$ und damit kann (2.5-26) in der Form $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{z}_k - \mathbf{F}\mathbf{z}_\infty + \mathbf{z}_\infty$ geschrieben werden. Mit dem nachfolgend definierten L -dim. Vektor

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_\infty \quad ; \quad \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{d}_k = \sigma_k^2 - \sigma_\infty^2 \quad (2.5-28)$$

ergibt sich dann folgende wichtige Darstellung :

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{F}\mathbf{d}_{k-1} = \mathbf{F}^k \mathbf{d}_0 = \mathbf{U} \boldsymbol{\Delta}^k \mathbf{U}^T \mathbf{d}_0 \quad (2.5-29)$$

Dabei wird ähnlich wie in (2.5-1) die Eigenwert-Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{U}^T$ mit $\boldsymbol{\Delta} = \text{Diag}(\delta_0, \dots, \delta_{L-1})^T$ betrachtet. Für ein hinreichend kleines α ist die Zeilensumme von \mathbf{F} kleiner als 1 und somit gilt $0 < \delta_i < 1$ für die Eigenwerte. Aus (2.5-29) und (2.5-28) folgt $\sigma_k^2 - \sigma_\infty^2 = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{d}_k = (\mathbf{U}^T \boldsymbol{\lambda})^T \boldsymbol{\Delta}^k (\mathbf{U}^T \mathbf{d}_0)$.

	$\alpha\sigma_a^2 = 2^{-7}$	$\alpha\sigma_a^2 = 2^{-15}$	$\alpha\sigma_a^2 = 2^{-19}$
$\lambda_{\max}^* =$	0.999 733 990	0.999 998 961	0.999 999 935
$\delta_{\max} =$	0.999 734 009	0.999 998 961	0.999 999 935
$\lambda_{\min}^* =$	0.969 496 048	0.999 878 976	0.999 992 436
$\delta_{\min} =$	0.969 646 085	0.999 878 980	0.999 992 436

Tabelle 2.2: Vergleich der Eigenwerte λ_i^* von \mathbf{A}^* mit den Eigenwerten δ_i von $\mathbf{F} = \mathbf{A}^* + \alpha^2 \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}^T$ für den AMI-Code bei $L = 16$

Die Einlaufkurve der Restsignal-Varianzen kann also in geschlossener Form angegeben werden :

$$\sigma_k^2 = \sigma_\infty^2 + \sum_{i=0}^{L-1} w_i t_i^k \quad , \quad 0 \leq t_i < 1 \quad (2.5-30)$$

dargestellt werden. Für die Konstanten gilt dabei

$$\left\{ \begin{array}{l} t_i = \delta_i \\ w_i = (\mathbf{U}^T \boldsymbol{\lambda})_i (\mathbf{U}^T \mathbf{d}_0)_i \end{array} \right\} \quad (2.5-31)$$

(In den Klammern sind Vektoren angegeben und der Index i bezeichnet dabei die i -te Komponente). \mathbf{d}_0 wird durch den Vektor \mathbf{z}_0 approximiert, der als die Diagonale der Matrix $\mathbf{Z}_0 = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_0 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_0^T = \mathbf{V}^T \boldsymbol{\epsilon}_0 \boldsymbol{\epsilon}_0^T \mathbf{V}$ definiert ist. Die Formel (2.5-30) ist eine Verallgemeinerung von (2.2-31) für unkorrelierte Leitungscode – denn (2.2-31) kann auch als $\sigma_k^2 = \sigma_\infty^2 + w_0 t_0^k$ mit $t_0 = A$, $w_0 = \sigma_0^2 - \sigma_\infty^2$ formuliert werden.

Prägend für die Konvergenzgeschwindigkeit zu Beginn der Adaption (k klein) ist w_{\max} und damit λ_{\max} . Die Konvergenz im Bereich der EndEinstellung (k groß) ist durch $t_{\max} = \delta_{\max}$ charakterisiert, d.h. starke Korrelationen in den a_k bzw. kleine Eigenwerte bei $\boldsymbol{\Phi}_{aa}$ bewirken eine sehr langsame Konvergenz. Beispiele für die starke Beeinflussung der Konvergenzgeschwindigkeit durch den verwendeten Leitungscode werden in Kapitel 5 angegeben. Bild 5.9 zeigt detailliert, welcher Term in der Summe aus (2.5-30) in Abhängigkeit von k dominierend ist.

Das numerische Beispiel aus Tabelle 2.2 zeigt, daß die Eigenwerte δ_i von \mathbf{F} und λ_i^* von \mathbf{A}^* sehr genau übereinstimmen. Somit ist die Näherung $\mathbf{F} \approx \mathbf{A}^*$ zulässig (also $\boldsymbol{\Delta} \approx \mathbf{A}^*$, $\mathbf{U} \approx \mathbf{E}$) und damit vereinfacht sich (2.5-31) zu :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_i = \lambda_i^* \approx 1 - 2\alpha\lambda_i \\ w_i = \lambda_i (\mathbf{d}_0)_i \end{array} \right\} \quad (2.5-32)$$

2.5.3 S-Adaption

Nachfolgend wird gezeigt, daß die S-Adaption auf die Korrelationseigenschaften des Leitungscodes nicht wesentlich anders reagiert als die K-Adaption. Überraschenderweise wird die Analyse hier durch die Quantisierung etwas vereinfacht.

2.5.3.1 Restfehler

Nach (2.4-4a) ist der Restfehler durch $W(\sigma_\infty) = \alpha L \sigma_a^2 / 2$ charakterisiert und wäre somit allenfalls über die Funktion W von den Korrelationen des Leitungscodes abhängig. Da jedoch die Restsignal-Verteilung und damit $W(\sigma) = E\{\sigma \varphi_N \text{sign}(u + \sigma \varphi_N)\}$ von der Sendefolge a_k völlig unabhängig ist, ergibt sich die

Folgerung Die Korrelationseigenschaften des Leitungscodes (2.5-33) beeinflussen den Restfehler nicht

Allerdings ist W auch von der Verteilung des Signals u_k abhängig. Wenn nun u_k ein Signal vom gleichen Typ wie y_k gemäß (2.1-4) mit gleichem Leitungscode ist, so kann die Verteilung von u_k durch die Korrelationseigenschaften stark geprägt sein. (2.5-33) ist also nur in Bezug auf unveränderte Verteilungen von u_k gültig.

2.5.3.2 Konvergenzgeschwindigkeit

Ergebnisse zur Konvergenzgeschwindigkeit lassen sich mit relativ einfachen Methoden nur unter der Voraussetzung herleiten, daß das Signal u_k normalverteilt ist. Diese Annahme soll für diesen Abschnitt gelten. Die S-Adaption bei beliebig verteilten Signalen u_k und korrelierten Leitungscodes wird in dieser Arbeit nicht behandelt.

Aus (2.3-7) folgt mit der Transformation (2.5-3) :

$$\tilde{\epsilon}_{k+1} = \tilde{\epsilon}_k - \alpha \tilde{\mathbf{a}}_k \text{sign}(u_k + \tilde{\mathbf{a}}_k^T \tilde{\epsilon}_k) \quad (2.5-34)$$

Ähnlich wie beim Übergang von (2.5-9) nach (2.5-10) folgt hieraus ($\mathbf{Z}_k = E\{\tilde{\epsilon}_k \tilde{\epsilon}_k^T\}$) :

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{Z}_k + \alpha^2 \mathbf{A} - \alpha E\{(\tilde{\epsilon}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T + \tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\epsilon}_k^T) \text{sign}(u_k + \tilde{\mathbf{a}}_k^T \tilde{\epsilon}_k)\} \quad (2.5-35)$$

Wegen der aus (2.2-14) resultierenden Unabhängigkeit von $\tilde{\mathbf{a}}_k$ und $\tilde{\epsilon}_k$ gilt (mit $\langle \cdot \rangle_{ii}$ werden die Diagonalelemente der in Klammern stehenden Matrix bezeichnet) :

$$E\{\langle \tilde{\epsilon}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T \rangle_{ii} (u_k + \tilde{\mathbf{a}}_k^T \tilde{\epsilon}_k)\} = E\{\langle \tilde{\epsilon}_k (\tilde{\mathbf{a}}_k^T \tilde{\mathbf{a}}_k) \tilde{\mathbf{a}}_k^T \rangle_{ii}\} = \langle \mathbf{Z}_k \mathbf{A} \rangle_{ii} \quad (2.5-36a)$$

Unter der Voraussetzung der Normalverteilung von $\tilde{\epsilon}_k$ und u_k folgt aus (A.1-14) :

$$E\{\langle \tilde{\epsilon}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T \rangle_{ii} \text{sign}(u_k + \tilde{\mathbf{a}}_k^T \tilde{\epsilon}_k)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\langle \mathbf{Z}_k \mathbf{A} \rangle_{ii}}{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_k^2}} \quad (2.5-36b)$$

Für die Diagonale der durch (2.5-35) beschriebenen Matrix-Rekursion folgt somit :

$$\mathbf{z}_{k+1} = \underbrace{\left(\mathbf{E} - 2\alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_k^2}} \mathbf{A} \right)}_{= \hat{\mathbf{F}}_k} \mathbf{z}_k + \alpha^2 \boldsymbol{\lambda} \quad (2.5-37)$$

Im Vergleich zu (2.5-26) ist $\hat{\mathbf{F}}_k$ jetzt eine Diagonalmatrix, die aber von k abhängig ist. Aus (2.5-37) folgt $(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{F}}_\infty) \mathbf{z}_\infty = \alpha^2 \boldsymbol{\lambda}$ bzw. :

$$\mathbf{z}_\infty = \alpha^2 (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{F}}_\infty)^{-1} \boldsymbol{\lambda} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_\infty^2} (1, 1, \dots, 1)^T \quad (2.5-38)$$

Hieraus folgt

$$\sigma_\infty^2 = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{z}_\infty = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_\infty^2} \cdot L\sigma_a^2$$

Dies entspricht genau dem Ergebnis (2.4-11) (mit einfacher Umformung einsehbar) und bestätigt die Folgerung (2.5-33) für normalverteiltes u_k .

Es wird jetzt $\sigma_k^2 \ll \sigma_u^2$ entsprechend (2.2-11) vorausgesetzt und damit ist $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{E} - 2\sqrt{2/\pi}\alpha_u \mathbf{A}$ (Erinnerung : $\alpha_u = \alpha/\sigma_u$) unabhängig von k . Diesem Vorgehen entspricht bei der K-Adaption die Unterdrückung von σ_k^2 in (2.5-24) bzw. die Approximation $\mathbf{F} \approx \mathbf{A}^*$. Mit $\mathbf{d}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_\infty$ folgt wie bei der K-Adaption $\sigma_k^2 - \sigma_\infty^2 = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{d}_k = \boldsymbol{\lambda}^T \hat{\mathbf{F}}^k \mathbf{d}_0$. Somit ist das Konvergenzverhalten vom gleichen Typ wie bei der K-Adaption und es gilt die Formel (2.5-30) mit den Konstanten :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_i = 1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha_u \lambda_i \\ w_i = \lambda_i(\mathbf{d}_0)_i \approx \lambda_i(\mathbf{z}_0)_i \end{array} \right\} \quad (2.5-39)$$

Der Vergleich mit (2.5-32) zeigt den gleichartigen Einfluß des Leitungscodes auf das Konvergenzverhalten.

2.6 Zusammenfassung

Es wurde (in Zusammenhang mit Kapitel 3) eine geschlossene Theorie wertdiskreter adaptiver Kompensationsfilter entwickelt. Die besonderen Kniffe dabei sind :

1. Durch eine Quantisierungsoperation an einer einzigen Stelle wird das komplette variable Filter mit dem Adaptionalgorithmus implizit quantisiert beschrieben

– aber alle Rechnungen können wie üblich innerhalb der reellen Zahlen erfolgen. Die vollständige Einbindung in die wertdiskrete “Umwelt” erfolgt im zweiten Teil dieser Arbeit.

2. Aufgrund der zeitlichen Invarianz des Restsignal-Verteilungstyps können die Funktionen W , S und T definiert werden, mit denen das deterministische Iterationsverfahren der Restsignal-Varianzen formuliert wird. Mit dem Banachschen Fixpunktsatz ist ein allgemeiner Konvergenzbeweis möglich mit Darstellungen für den Restfehler und die Konvergenzgeschwindigkeit.
3. Das Konzept der Taylor-Entwicklung der Verteilungsdichtefunktion des nicht-kompensierbaren Signals erlaubt vereinfachte Darstellungen für den Restfehler und die Konvergenzgeschwindigkeit, die sowohl von theoretischem Interesse wie von größter praktischer Bedeutung sind.

Zusammenfassung der Hauptergebnisse : Die Größe des Restfehlers ist abhängig von den Werten der Verteilungsdichtefunktion des nicht-kompensierbaren Signals u_k an den Sprungstellen der Quantisierungskennlinie, während im wertkontinuierlichen Fall nur die Leistung des Signals u_k eingeht. Von besonderen Verteilungen abgesehen, bringt das Sign-Verfahren als das am einfachsten zu realisierende Adaptionverfahren zugleich die besten Ergebnisse. Dabei sind die Formeln zur Berechnung des Restfehlers sehr einfach anwendbar und eine exakte Kenntnis der speziellen Verteilung des Signals u_k ist nicht erforderlich.

Besonders ungünstige Verteilungen können aber doch bei praktischen Anwendungen auftreten und weil hier die wertdiskreten Verfahren völlig anders reagieren, werden diese Fälle besonders genau untersucht. Mit theoretischen Beispielen wird gezeigt, daß die bekannten konventionellen Analysemethoden hier zu völlig falschen Ergebnissen führen.

Im letzten Abschnitt wird gezeigt, daß der jeweils verwendete Leitungscode den Restfehler nicht, die Konvergenzgeschwindigkeit jedoch sehr stark beeinflußt. Mit einfachen Formeln kann die Einlaufkurve des Restfehlers sowohl für den wertkontinuierlichen wie den wertdiskreten Fall sehr präzise vorausberechnet werden.

Die wichtigsten Formeln zur Berechnung von Restfehler und Konvergenzgeschwindigkeit sind abschließend in Tabelle 2.3 zusammengestellt.

	Restfehler	Konvergenzgeschwindigkeit	
		Code unkorreliert	Code beliebig
	Code beliebig	$\sigma_k^2 = \sigma_\infty^2 + (\sigma_0^2 - \sigma_\infty^2) \cdot \ T\ _I^k$	$\sigma_k^2 = \sigma_\infty^2 + \sum_{i=0}^{L-1} w_i t_i^k$
	$R_\infty^2 =$	$\ T\ _I =$	$w_i =$
K-Ad.	$\frac{\alpha L \sigma_a^2}{2}$	$1 - 2\alpha \sigma_a^2$	$\lambda_i(\mathbf{d}_0)_i$
S-Ad., $u \sim \text{Normal}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \alpha_u L \sigma_a^2$	$1 - \alpha_u \sigma_a^2 \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$	$1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha_u \lambda_i$
S-Ad., $f_{u_N}(0) \gg 0$	$\frac{\alpha_u L \sigma_a^2}{4 f_{u_N}(0)}$	$1 - \alpha_u \sigma_a^2 \cdot 4 f_{u_N}(0)$	
S-Ad., $f_{u_N}(0) = 0, f_{u_N}''(0) \gg 0$	$\sqrt{\frac{\alpha_u L \sigma_a^2}{2 f_{u_N}''(0)}}$	$1 - \alpha_u^{3/2} \sigma_a^2 \cdot 4 \sqrt{\frac{L \sigma_a^2 f_{u_N}''(0)}{2}}$	
Q-Ad., Geradenapproximation	$\frac{\alpha L \sigma_a^2}{2W^*} \cdot \frac{E\{Q^2(u)\}}{\sigma_u^2}$	$1 - 2\alpha \sigma_a^2 \cdot W^*$	

Tabelle 2.3: Zusammenfassung : Restfehler und Konvergenzgeschwindigkeit

Kapitel 3

Die Berechnung der Restsignal-Verteilung

Es wurde schon mehrfach erwähnt und vorausgesetzt, daß das Restsignal eine Normalverteilung besitzt. Explizit wurde dies jedoch nur bei einigen theoretischen Beispielen ausgenutzt. Von einigen ausgearteten Verteilungen des nicht-kompensierbaren Signals abgesehen genügt es jedoch, wenn das Restsignal eine leicht verformte und eventuell abgetastete Normalverteilung aufweist. Wenn für die Verteilungsdichtefunktion des nicht-kompensierbaren Signals u_k eine Taylor-Entwicklung möglich ist, können die Ergebnisse zum Restfehler und zur Konvergenzgeschwindigkeit allein mit den Momenten des Signals u_k formuliert werden. In den meisten realen Fällen brauchen dabei die Momente nur bis zur 2.Ordnung bekannt zu sein, d.h. der spezielle Verteilungstyp des Restsignals wirkt sich überhaupt nicht aus. Die genaue Verteilung des Restsignals erlangt erst große Bedeutung bei der Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit in einem digitalen Empfänger.

Als Hauptergebnis wird in diesem Kapitel sowohl für die K-Adaption wie für die S-Adaption gezeigt, daß das Restsignal zwar nicht exakt, aber doch in sehr guter Näherung normalverteilt ist, wobei diese Aussage auch schon für adaptive Filter mit nur einem einzigen Koeffizienten gilt. Allerdings wird für einige der oben erwähnten ausgearteten Verteilungen des nicht-kompensierbaren Signals nachgewiesen, daß das Restsignal bei der S-Adaption doch nicht normalverteilt ist.

3.1 Vorbemerkungen

3.1.1 Existenz einer Grenzverteilung

Die Existenz einer Grenzverteilung wurde bereits in (2.2-24) vorausgesetzt, um den Verteilungstyp von φ_k für hinreichend großes k als von k unabhängig annehmen zu können. Diese Annahme findet sich auch in [4.1] und es wird dort generell mit der Normalverteilung gerechnet. In [5.1] und [5.5] wird die Konvergenz der Koeffizienten-Fehleinstellung gegen eine Grenzverteilung gezeigt, wobei der Nachweis für verschiedene Konvergenzarten erfolgt (convergence in law, mischende Konvergenz, schwache Konvergenz). Dabei wird die Grenzverteilung aber nicht explizit berechnet, was freilich im allgemeinen Fall auch kaum gelingen wird.

Die Existenz einer Grenzverteilung für $k \rightarrow \infty$ wird nun generell vorausgesetzt. Ziel in Kapitel 3 ist es, für eine vereinfachte Situation diese Grenzverteilung konkret oder zumindest näherungsweise explizit zu berechnen.

Mit Ausnahme von [4.1] und [4.15] wird in der Literatur nur der wertkontinuierliche Fall behandelt, obwohl im wertdiskreten Fall die Situation viel interessanter und komplizierter ist. In [1.3, Seite 37] wird aus anderen Arbeiten zitiert, daß die Koeffizienten-Fehleinstellung (bei RLS-Adaption) unter relativ schwachen Voraussetzungen gegen die Normalverteilung konvergiert. Dies widerspricht aber den Ergebnissen hier (Satz 3.1). Für den Spezialfall $L = 1$ sowie normalverteiltem Signal u_k und normalverteilter Datenfolge a_k wird in [5.2] ein Teil von Satz 3.1 gezeigt. Alle anderen Ergebnisse in Kapitel 3 sowohl zur K-Adaption wie zur S-Adaption sind vollkommen neu.

3.1.2 Besondere Eigenschaften des Restsignals

3.1.2.1 Beschränktheit des Restsignals

Alle Ergebnisse aus Kapitel 2 sind unabhängig davon, ob das Restsignal beschränkt oder unbeschränkt ist. Hierbei muß man natürlich von den technischen Beschränkungen absehen, da es in jeder Implementierung immer eine größte darstellbare Zahl gibt.

Die Beschränktheit des Restsignals ist gleichwertig mit der Beschränktheit der einzelnen Koeffizienten. Durch Auswahl von speziellen Sendefolgen kann die Unbeschränktheit der Koeffizienten nicht nachgewiesen werden. Dies gilt auch für Simulationsrechnungen, in denen mit einer speziell konstruierten maximal ungünstigen Sendefolge versucht wird, einen Koeffizienten gegen Unendlich zu drücken. Somit muß das Restsignal als beschränkt angenommen werden. Das steht aber nicht im Wi-

derspruch zu den nachfolgenden Ergebnissen, in denen die Koeffizienten-Einstellung näherungsweise als normalverteilt nachgewiesen wird.

3.1.2.2 Kontinuierliche und diskrete Restsignale

Bei der K-Adaption sind sowohl die Koeffizienten wie das Kompensationssignal \hat{y}_k wertkontinuierlich. Unabhängig vom Signal y_k ist dann $\varphi_k = y_k - \hat{y}_k$ ebenfalls wertkontinuierlich. Das bedeutet (von mathematischen Feinheiten abgesehen), daß die Verteilungsdichtefunktion von φ_k als stetige Funktion erscheint und sogar Taylorentwickelbar ist.

Bei der Q-Adaption ist \hat{y}_k mit q_c quantisiert, d.h. die Verteilungsdichtefunktion von \hat{y}_k besteht aus Dirac-Stößen im Abstand q_c . Für y_k gibt es zwei Möglichkeiten :

- Wenn y_k kontinuierlich ist, so ist auch φ_k kontinuierlich.
- Wenn dagegen y_k das Ausgangssignal eines Transversalfilters der endlichen Länge L ist, kann y_k nur m^L ($m =$ Stufenzahl des Leitungscode) verschiedene Werte annehmen. Exakt besteht die Verteilungsdichtefunktion f_φ des Restsignals dann aus Dirac-Stößen in unterschiedlichen Abständen. Mit $\alpha \rightarrow 0$ werden diese Abstände immer kleiner, so daß es nicht überrascht, wenn die Grenzverteilung für $\alpha \rightarrow 0$ als kontinuierliche Verteilung erscheint.

Neben $k \rightarrow \infty$ wird also ein zweiter Grenzprozeß $\alpha \rightarrow 0$ betrachtet. Mit Konvergenz ist die punktweise Konvergenz der charakteristischen Funktionen gemeint. Für $\alpha > 0$ ist dann die tatsächliche Verteilung des Restsignals eine Abtastung der kontinuierlich leicht verformten kontinuierlichen Grenzverteilung.

Das Rechnen mit der kontinuierlichen Grenzverteilung ist natürlich einfacher als mit der tatsächlichen diskreten Verteilung. Diese Methode ist aber selbstverständlich nur dann sinnvoll, wenn die Streuung des Restsignals noch ein Vielfaches der Quantisierungsschrittweite des Restsignals beträgt. Bei (2.3-6) wurde jedoch bereits erwähnt, daß dies bei den praktischen Anwendungen durchwegs zutrifft.

Am Beispiel der S-Adaption wird gezeigt, wann die Grenzverteilung für $\alpha \rightarrow 0$ tatsächlich kontinuierlich ist.

3.1.3 Vereinfachung der Aufgabenstellung

Die einzelnen Koeffizienten des adaptiven Filters werden im eingeschwungenen Zustand als Zufallsgrößen mit zeitunabhängiger Verteilung aufgefaßt, d.h. als stationärer Prozeß. Es braucht nur nachgewiesen zu werden, daß die Koeffizienten normalverteilt sind. Das ist gleichwertig mit dem entsprechenden Nachweis für den Vektor

der Koeffizienten-Fehleinstellung. Im Fall des Binärcodes folgt daraus dann exakt die Normalverteilung für das Restsignal, da die Normalverteilung sowohl bei der Multiplikation mit einer statistisch unabhängigen binären Größe wie bei mehrfacher Überlagerung erhalten bleibt. Für höherstufige Codes kann das Restsignals allerdings nur näherungsweise normalverteilt sein. Zur Vereinfachung wird nun der Binärcode unterstellt.

Je mehr Koeffizienten das adaptive Filter hat, desto einsichtiger erscheint die Normalverteilung des Restsignals. Es genügt also, den Nachweis für ein Filter mit nur einem Koeffizienten (also $L = 1$) zu führen.

Nebenbemerkung : Es wäre falsch, die Koeffizienten-Fehleinstellung allein deswegen als normalverteilt annehmen zu wollen, weil sie von sehr vielen vorausgegangenen Verstellsinformationen abhängig ist. Der Fehler bei dieser oder ähnlichen rein anschaulichen Überlegungen ist, daß diese Verstellsinformationen untereinander schwach korreliert sind, weil sie alle vom aktuellen (sich langsam ändernden) Wert der Fehleinstellung abhängen. Schließlich sagt auch Satz 3.1 aus, daß das Restsignal in aller Regel nicht exakt normalverteilt ist.

3.2 K-Adaption

3.2.1 Herleitung verschiedener Grundgleichungen und einfache Folgerungen

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird nun $\sigma_a = 1$ unterstellt, so daß mit den vorangehend aufgeführten Voraussetzungen gilt :

$$a_k \in \{+1, -1\} \quad (3.2-1)$$

$$L = 1 \quad (3.2-2)$$

Ferner wird definiert :

$$\tilde{u}_k := -a_k u_k \quad \implies \quad \text{es gilt } \tilde{u}_k \sim u_k \text{ und } \sigma_{\tilde{u}}^2 = \sigma_u^2 \quad (3.2-3)$$

Die Gleichheit der Verteilungen von \tilde{u}_k und u_k folgt natürlich direkt aus der Unabhängigkeit von a_k und u_k sowie der vorausgesetzten Symmetrie der Verteilung von u_k .

Die 1-dim. Rekursion der Koeffizienten-Fehleinstellung kann nun gemäß (2.2-12) so geschrieben werden ($\varphi_k = a_k \varepsilon_k$) :

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - \alpha a_k (u_k + a_k \varepsilon_k) = (1 - \alpha) \varepsilon_k + \alpha \tilde{u}_k \quad (3.2-4)$$

Die Gültigkeit des Independence-Theorems (2.2-14) ist hieraus direkt einsehbar, da ε_{k+1} nicht von a_{k+1} beeinflusst wird. Somit gilt :

$$\sigma_k = D\{\varphi_k\} = D\{a_k \varepsilon_k\} = D\{\varepsilon_k\} \quad (3.2-5)$$

$$\varepsilon_k \text{ und } \tilde{u}_k \text{ sind statistisch unabhängig} \quad (3.2-6)$$

Aus (3.2-4) folgt sofort für $k \rightarrow \infty$:

$$\sigma_\infty^2 = (1 - \alpha)^2 \sigma_\infty^2 + \alpha^2 \sigma_u^2 \quad \iff \quad \sigma_\infty^2 = \frac{\alpha}{2 - \alpha} \sigma_u^2 \quad (3.2-7)$$

Dieses Ergebnis folgt natürlich auch aus (2.2-27).

Die als existierend vorausgesetzte Grenzverteilung von ε_k für $k \rightarrow \infty$ soll die Amplituden-Verteilungsdichtefunktion $f_\varphi(e)$, die Verteilungsfunktion $F_\varphi(e)$ und die charakteristische Funktion $C_\varphi(\chi)$ haben (der Index ∞ wird dabei unterdrückt). Nach (3.2-4) hat nun $(1 - \alpha)\varepsilon + \alpha\tilde{u}$ die gleiche Verteilung wie ε selber, d.h. für die Verteilungsdichtefunktionen gilt :

$$f_\varepsilon(e) = f_{(1-\alpha)\varepsilon + \alpha\tilde{u}}(e) \quad (3.2-8)$$

Dieser Sachverhalt kann natürlich in entsprechender Weise auch mit den Verteilungsfunktionen oder den charakteristischen Funktionen formuliert werden. Wegen (3.2-6) ergibt sich die Verteilungsdichtefunktion der Summe als die Faltung der Einzeldichten : $f_\varepsilon(e) = f_{(1-\alpha)\varepsilon}(e) \star f_{\alpha u}(e)$ bzw. ausgeschrieben :

$$f_\varepsilon(e) = \frac{1}{\alpha(1 - \alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon\left(\frac{\xi}{1 - \alpha}\right) f_u\left(\frac{e - \xi}{\alpha}\right) d\xi \quad (3.2-9)$$

Das ist eine lineare homogene Fredholmsche Integralgleichung mit asymmetrischem Kern, die hier nicht weiter betrachtet wird. Für die charakteristischen Funktionen folgt aus (3.2-8) sofort die Funktionalgleichung :

$$C_\varepsilon(\chi) = C_\varepsilon((1 - \alpha)\chi) \cdot C_u(\alpha\chi) \quad (3.2-10)$$

zu der direkt eine Lösung angegeben werden kann. Dazu wird

$$C_\varepsilon(\chi) = C_\varepsilon((1 - \alpha)^n \chi) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} C_u(\alpha(1 - \alpha)^i \chi)$$

notiert und wegen der Stetigkeit von $C_\varepsilon(\chi)$ und wegen $C_\varepsilon(0) = 1$ gilt mit $n \rightarrow \infty$:

$$C_\varepsilon(\chi) = \prod_{i=0}^{\infty} C_u(\alpha(1 - \alpha)^i \chi) \quad (3.2-11)$$

Durch $C_\varepsilon(0) = 1$ wird gesichert, daß die Funktionalgleichung (3.2-10) eine eindeutige Lösung hat. Die Formel (3.2-11) ist allerdings praktisch wertlos, da selbst für einfachste Funktionen $C_u(\chi)$ das unendliche Produkt nicht explizit berechnet werden kann. Eine Ausnahme bildet der folgende Satz :

Satz 3.1 Die Koeffizienten-Fehleinstellung ε_∞ ist dann und nur dann normalverteilt, wenn das Signal u_k normalverteilt ist.

Beweis 1) ε_∞ sei normalverteilt, d.h. $C_\varepsilon(\chi) = \exp(-2\pi^2\sigma_\infty^2\chi^2)$. Dann gilt nach (3.2-10) :

$$C_{\alpha u}(\chi) = C_u(\alpha\chi) = \frac{C_\varepsilon(\chi)}{C_\varepsilon((1-\alpha)\chi)} = \exp(-2\pi^2\sigma_\infty^2(1-(1-\alpha)^2)\chi^2)$$

Also ist αu_k und damit auch u_k normalverteilt.

2) u_k sei normalverteilt, d.h. $C_u(\chi) = \exp(-2\pi^2\sigma_u^2\chi^2)$. Nach (3.2-11) gilt :

$$C_\varepsilon(\chi) = \prod_{i=0}^{\infty} \exp(-2\pi^2\sigma_u^2\alpha^{2i}\chi^2) = \exp\left(-2\pi^2\sigma_u^2\frac{\alpha^2}{1-(1-\alpha)^2}\chi^2\right)$$

Also ist ε_∞ normalverteilt und damit ist der Beweis abgeschlossen.

Da u_k in aller Regel nicht normalverteilt ist, kann ε_∞ und das Restsignal nicht exakt normalverteilt sein ! Jedoch ist ε_∞ und damit auch ε_k näherungsweise normalverteilt, was gerade das Hauptergebnis dieses Kapitels sein wird.

Der Übergang zu den normalisierten charakteristischen Funktionen in (3.2-10) gemäß (A.1-13) ergibt zunächst

$$C_{\varepsilon_N}(\sigma_\infty\chi) = C_{\varepsilon_N}(\sigma_\infty(1-\alpha)\chi) \cdot C_{u_N}(\sigma_u\alpha\chi)$$

und mit (3.2-7) folgt hieraus

$$C_{\varepsilon_N}(\chi) = C_{\varepsilon_N}((1-\alpha)\chi) \cdot C_{u_N}(\sqrt{\alpha(2-\alpha)}\chi) \quad (3.2-12)$$

Da die Lösung dieser Funktionalgleichung nur von α und C_{u_N} abhängig ist, ergibt sich die

$$\textbf{Folgerung} \quad \text{Der Verteilungstyp von } \varepsilon_\infty \text{ ist unabhängig von } \sigma_u \text{ und abhängig von } \alpha \text{ und dem Verteilungstyp von } u_k \quad (3.2-13)$$

Die Leistung des Signals u_k kann sich also ändern, ohne daß sich der Verteilungstyp des Restechos ändert. Eine Änderung der Verstellgröße oder des Verteilungstyps von u_k ändert jedoch den Verteilungstyp des Restechos.

3.2.2 Grenzverteilung des Restsignals bei $\alpha \rightarrow 0$

Da der Verteilungstyp von ε_∞ von α abhängig ist, interessiert natürlich der Grenzwert für $\alpha \rightarrow 0$. Dieser Grenzwert ist selbstverständlich auch von praktischer Bedeutung, wenn die Konvergenz gegen die Grenzverteilung hinreichend schnell ist. In diesem Fall kann die unbekannte Verteilung für ein $\alpha > 0$ durch die Grenzverteilung für $\alpha \rightarrow 0$ approximiert werden.

Satz 3.2 Für kleines α gilt näherungsweise :

$$C_{\varepsilon_N}(\chi) = \exp \left(\int_0^\chi \frac{C_{u_N}(\sqrt{2\alpha t}) - 1}{\alpha t C_{u_N}(\sqrt{2\alpha t})} dt \right) \quad (3.2-14)$$

Für jede beliebige Verteilung des Signals u_k (die auch diskret sein darf) konvergiert die Verteilung von ε_∞ für $\alpha \rightarrow 0$ exakt gegen die Normalverteilung, d.h.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\varepsilon_N}(\chi) = \exp(-2\pi^2 \chi^2) \quad (3.2-15)$$

Beweis Wenn in (3.2-12) direkt $\alpha = 0$ gesetzt wird, ergibt sich nur die triviale Aussage $C_{\varepsilon_N}(\chi) = C_{\varepsilon_N}(\chi)C_{u_N}(0)$. Es ist deshalb unumgänglich, eine explizite Lösung für (3.3-12) abzuleiten und dann in dieser Lösung $\alpha = 0$ oder $\alpha \rightarrow 0$ zu setzen.

Ausgangspunkt ist die Taylor-Entwicklung von $C_{\varepsilon_N}(\chi)$:

$$C_{\varepsilon_N}(\chi - \alpha\chi) = C_{\varepsilon_N}(\chi) - \alpha\chi C'_{\varepsilon_N}(\chi) + R(\chi) \quad (3.2-16)$$

$$\text{mit } R(\chi) = \frac{1}{2}\alpha^2 \chi^2 C''_{\varepsilon_N}(\chi_0)$$

Es gilt $C''_{\varepsilon_N}(\chi_0) = E\{(-j2\pi\varepsilon_N)^2 \exp(-j2\pi\chi_0\varepsilon_N)\}$ und somit

$$|C''_{\varepsilon_N}(\chi_0)| \leq 4\pi^2 E\{\varepsilon_N^2\} = 4\pi^2 \quad \implies \quad |R(\chi)| \leq 2\pi^2 \alpha^2 \chi^2$$

Einsetzen von (3.2-16) in (3.2-12) ergibt :

$$C_{\varepsilon_N}(\chi) = (C_{\varepsilon_N}(\chi) - \alpha\chi C'_{\varepsilon_N}(\chi) + R(\chi)) \cdot C_{u_N}(\sqrt{\alpha(2-\alpha)}\chi)$$

Hieraus folgt durch einfache Umformung :

$$\begin{aligned} & \alpha\chi C'_{\varepsilon_N}(\chi) C_{u_N}(\sqrt{\alpha(2-\alpha)}\chi) \\ &= C_{\varepsilon_N}(\chi) \left(C_{u_N}(\sqrt{\alpha(2-\alpha)}\chi) - 1 \right) + R(\chi) C_{u_N}(\sqrt{\alpha(2-\alpha)}\chi) \end{aligned}$$

Durch eine weitere einfache Umformung ergibt sich eine lineare Differentialgleichung 1.Ordnung :

$$\frac{C'_{\varepsilon_N}(\chi)}{C_{\varepsilon_N}(\chi)} = \frac{C_{u_N}(\sqrt{\alpha(2-\alpha)}\chi) - 1}{\alpha\chi C_{u_N}(\sqrt{\alpha(2-\alpha)}\chi)} + \frac{R(\chi)}{\alpha\chi C_{\varepsilon_N}(\chi)} \quad (3.2-17)$$

Für $\alpha \rightarrow 0$ kann im ersten Summanden $2-\alpha$ durch 2 approximiert werden. Der zweite Summand konvergiert gegen 0, da $R(\chi)$ durch α^2 beschränkt ist. Damit ergibt sich als Lösung der approximierten Differentialgleichung

$$\frac{C'_{\varepsilon_N}(\chi)}{C_{\varepsilon_N}(\chi)} = \frac{C_{u_N}(\sqrt{2\alpha}\chi) - 1}{\alpha\chi C_{u_N}(\sqrt{2\alpha}\chi)}$$

der in (3.2-14) angegebene Ausdruck.

Nachfolgend wird der Quotient in (3.2-14) näher betrachtet. Gemäß (A.1-5) gilt $C_{u_N}(0) = 1$ und $C'_{u_N}(0) = 0$ und $C''_{u_N}(0) = -4\pi^2$. Mit der l'Hospitalschen Regel (H) folgt :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{C_{u_N}(\sqrt{2\alpha}t) - 1}{\alpha t C_{u_N}(\sqrt{2\alpha}t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C_{u_N}(\sqrt{2\alpha}t) - 1}{\alpha t} \stackrel{(H)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\alpha} \cdot C'_{u_N}(\sqrt{2\alpha}t)}{\alpha} = 0$$

Mit $\beta = \sqrt{2\alpha}$ und zweifacher Anwendung der l'Hospitalschen Regel ergibt sich :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C_{u_N}(\sqrt{2\alpha}t) - 1}{\alpha t C_{u_N}(\sqrt{2\alpha}t)} &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{C_{u_N}(\beta t) - 1}{\beta^2/2 \cdot t \cdot 1} \stackrel{(H)}{=} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{t \cdot C'_{u_N}(\beta t)}{\beta \cdot t} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{C'_{u_N}(\beta t)}{\beta} \stackrel{(H)}{=} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{t \cdot C''_{u_N}(\beta t)}{1} = -4\pi^2 \cdot t \end{aligned}$$

Somit gilt nach (3.2-14) mit Vertauschung von Integration und Grenzwert-Bildung :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\varepsilon_N}(\chi) = \exp\left(\int_0^\chi -4\pi^2 t dt\right) = \exp(-2\pi^2 \chi^2) \quad (3.2-18)$$

Das ist die charakteristische Funktion der Normalverteilung, womit alles bewiesen ist.

Bei $\alpha \rightarrow 0$ müssen die auf Varianz 1 normierten Verteilungen betrachtet werden — sonst gelten wegen $\sigma_\infty \rightarrow 0$ nur die trivialen Aussagen $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\varepsilon(e) = \delta(e)$ und $\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_\varepsilon(\chi) = 1$.

Für verschiedene Verteilungen des Signals u_k (Normal-, gleichmäßige, Binär-Verteilung) wurden sowohl (3.2-14) wie (3.2-11) numerisch ausgewertet. Die berechneten

Verteilungen stimmen überein und weichen von der Normalverteilung sowohl bzgl. der charakteristischen Funktionen wie der Verteilungsdichtefunktionen (nach numerischer Fourier-Rücktransformation) schon bei $\alpha = 0.1$ nur sehr geringfügig ab – dies gilt bei den Verteilungsdichtefunktionen auch im Bereich von sehr großen Amplitudenwerten. Für alle praktisch interessanten Werte von α darf ε_∞ in sehr guter Näherung als normalverteilt angesehen werden.

3.3 S-Adaption

3.3.1 Herleitung einer Grundgleichung und einfache Folgerungen

Es sollen weiterhin die Voraussetzungen (3.2-1) und (3.2-2) sowie die Bezeichnung $\tilde{u}_k = -a_k u_k$ gemäß (3.2-3) gelten. Ähnlich wie bei (3.2-4) kann die 1-dim. Rekursion der Koeffizienten-Fehleinstellung so geschrieben werden :

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - \alpha a_k \operatorname{sign}(u_k + a_k \varepsilon_k) = \varepsilon_k + \alpha \operatorname{sign}(\tilde{u}_k - \varepsilon_k) \quad (3.3-1)$$

Für die bedingte Wahrscheinlichkeit bei festgehaltenem $\varepsilon_k = \eta$ gilt :

$$\begin{aligned} P\{\varepsilon_{k+1} \leq e \mid \varepsilon_k = \eta\} &= P\{\eta + \alpha \operatorname{sign}(\tilde{u}_k - \eta) \leq e\} \\ &= P\{\operatorname{sign}(\tilde{u}_k - \eta) \leq \frac{e - \eta}{\alpha}\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \eta > e + \alpha \\ P\{\tilde{u}_k \leq \eta\} = F_u(\eta) & \text{sonst} \\ 1 & \eta < e - \alpha \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Dabei ist $F_u(\eta) = P\{u \leq \eta\}$ die Verteilungsfunktion des Signals u_k . Wegen der vorausgesetzten Symmetrie der Verteilung von u_k gilt $F_u(\eta) + F_u(-\eta) = 1$ und deshalb kann geschrieben werden :

$$P\{\varepsilon_{k+1} \leq e \mid \varepsilon_k = \eta\} = \left\{ \begin{array}{ll} F_u(-\eta) & \eta < e - \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ll} F_u(\eta) & \eta \leq e + \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}$$

Durch Integration nach η und Wichtung mit der Verteilungsdichtefunktion $f_{\varepsilon_k}(\eta)$ gemäß der Formel (A.2-5) ergibt sich :

$$P\{\varepsilon_{k+1} \leq e\} = \int_{-\infty}^{e-\alpha} F_u(-\eta) \cdot f_{\varepsilon_k}(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{e+\alpha} F_u(\eta) \cdot f_{\varepsilon_k}(\eta) d\eta \quad (3.3-2)$$

Durch Differentiation nach e ergibt sich $f_{\varepsilon_{k+1}}(e)$ und für $k \rightarrow \infty$ ergibt sich eine Grundgleichung für f_ε (wie bei (3.2-8) wird der Index ∞ unterdrückt) :

$$f_\varepsilon(e) = F_u(-e + \alpha) \cdot f_\varepsilon(e - \alpha) + F_u(e + \alpha) \cdot f_\varepsilon(e + \alpha) \quad (3.3-3)$$

Dieser Funktionalgleichung der Verteilungsdichtefunktionen entnimmt man unmittelbar die

Folgerung Der Verteilungstyp von ε_∞ ist abhängig von α , σ_∞ , σ_u und dem Verteilungstyp des Signals u_k (3.3-4)

Die direkte Lösung von (3.3-3) erscheint schwierig : Durch Fourier-Transformation ergeben sich zwar die charakteristischen Funktionen gemäß (A.1-4) und (A.1-6), aber die Multiplikation führt zu einer Faltung und damit zu einer Integralgleichung. Einfachere Darstellungen ergeben sich nur mit zusätzlichen Voraussetzungen an das nicht-kompensierbare Signal u_k :

3.3.2 Situation bei Taylor-Entwickelbarkeit der Verteilungsdichtefunktion des Signals u_k und Grenzverteilung bei $\alpha \rightarrow 0$

Es wird jetzt vorausgesetzt, daß die Verteilungsdichtefunktion f_u bei 0 in eine Taylor-Reihe entwickelt werden kann. Für die notwendige Genauigkeit und den möglichen Abbruch der Entwicklung bei niedrigen Potenzen gelten die gleichen Aussagen wie in Abschnitt 2.3.3.2. Für die Verteilungsfunktion lautet die Entwicklung so :

$$F_u(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{F_u^{(r)}(0)}{r!} \xi^r = \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f_u^{(r-1)}(0)}{r!} \xi^r \quad (3.3-5)$$

Durch Einsetzen dieser Entwicklung in (3.3-3) ergibt sich eine vereinfachte Funktionalgleichung, in der $f_\varepsilon(e)$ nur noch mit e -Potenzen gewichtet wird :

$$f_\varepsilon(e) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{F_u^{(r)}(0)}{r!} \left((-e + \alpha)^r f_\varepsilon(e - \alpha) + (e + \alpha)^r f_\varepsilon(e + \alpha) \right) \quad (3.3-6)$$

In Verallgemeinerung von (A.1-5) gilt :

$$e^r \cdot f_\varepsilon(e) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{(-j2\pi)^r} \cdot C_\varepsilon^{(r)}(\chi) \quad (3.3-7)$$

Durch Fourier-Transformation der Gleichung (3.3-6) ergibt sich nun keine Integralgleichung, sondern eine lineare Differentialgleichung der charakteristischen Funktionen von "unendlicher Ordnung" mit nicht-konstanten Koeffizienten :

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(\chi) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{F_u^{(r)}(0)}{r!(-j2\pi)^r} \left((-1)^r \cdot e^{-j2\pi\chi\alpha} + e^{j2\pi\chi\alpha} \right) C_\varepsilon^{(r)}(\chi) \\ &= \cos(2\pi\chi\alpha) C_\varepsilon(\chi) - \frac{f_u(0)}{\pi} \sin(2\pi\chi\alpha) C_\varepsilon'(\chi) \\ &\quad + \frac{f_u''(0)}{3(2\pi)^3} \sin(2\pi\chi\alpha) C_\varepsilon'''(\chi) + \dots \end{aligned} \quad (3.3-8)$$

Mit Hilfe von (A.1-12) und (A.1-13) ergibt sich hieraus eine äquivalente Darstellung mit den auf Varianz 1 normierten charakteristischen Funktionen bzw. Verteilungsdichtefunktionen :

$$\begin{aligned} C_{\varepsilon_N}(\chi) &= \cos\left(\frac{2\pi\chi\alpha}{\sigma_\infty}\right) C_{\varepsilon_N}(\chi) \\ &\quad - \frac{f_{u_N}(0)}{\pi} \frac{\sigma_\infty}{\sigma_u} \sin\left(\frac{2\pi\chi\alpha}{\sigma_\infty}\right) C_{\varepsilon_N}'(\chi) \\ &\quad + \frac{f_{u_N}''(0)}{3(2\pi)^3} \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_u}\right)^3 \sin\left(\frac{2\pi\chi\alpha}{\sigma_\infty}\right) C_{\varepsilon_N}'''(\chi) + \dots \end{aligned} \quad (3.3-9)$$

Für die Lösung dieser Differentialgleichung ist es wie bei Satz 3.2 sinnlos $\alpha = 0$ zu setzen, zumal dann auch $\sigma_\infty = 0$ gilt.

Genau wie in Abschnitt 2.4.1 erfolgt jetzt eine Fallunterscheidung nach $f_{u_N}(0) \gg 0$ bzw. $f_{u_N}(0) = 0$ und $f_{u_N}''(0) \gg 0$.

Voraussetzung $f_{u_N}(0) \gg 0$

Nach (2.4-9a) gilt hier :

$$\frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_u^2} = \frac{\alpha}{4\sigma_u f_{u_N}(0)} \quad (3.3-10)$$

Mit Abbruch nach $f_{u_N}(0)$ lautet die Differentialgleichung (3.3-9) dann so :

$$C_{\varepsilon_N}(\chi) = \cos(4\pi\sqrt{f_u(0)\alpha}\chi) \cdot C_{\varepsilon_N}(\chi) - \frac{\sqrt{f_u(0)\alpha}}{2\pi} \sin(4\pi\sqrt{f_u(0)\alpha}\chi) \cdot C'_{\varepsilon_N}(\chi) \quad (3.3-11)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung für $\alpha \rightarrow 0$ behandelt der folgende Satz :

Satz 3.3 Für $f_{u_N}(0) \gg 0$ gilt näherungsweise :

$$C_{\varepsilon_N}(\chi) = \left[\frac{1 + \cos(4\pi\sqrt{f_u(0)\alpha}\chi)}{2} \right] \frac{1}{2f_u(0)\alpha} \quad (3.3-12)$$

Für alle Verteilungsdichtefunktionen mit $f_{u_N}(0) \gg 0$ konvergiert die Verteilung der Koeffizienten-Fehleinstellung für $\alpha \rightarrow 0$ gegen die Normalverteilung.

Beweis Aus (3.3-11) folgt zunächst die Darstellung :

$$\frac{C'_{\varepsilon_N}(\chi)}{C_{\varepsilon_N}(\chi)} = \frac{2\pi}{\sqrt{f_u(0)\alpha}} \cdot \frac{\cos(4\pi\sqrt{f_u(0)\alpha}\chi) - 1}{\sin(4\pi\sqrt{f_u(0)\alpha}\chi)} \quad (3.3-13)$$

Mit den elementaren Integrationsregeln [6.6] folgt hieraus :

$$\begin{aligned} \ln C_{\varepsilon_N}(\chi) &= \frac{2\pi}{\sqrt{f_u(0)\alpha}} \cdot \frac{1}{4\pi\sqrt{f_u(0)\alpha}} \left(\ln \sin(4\pi\sqrt{f_u(0)\alpha}\chi) - \ln \tan(2\pi\sqrt{f_u(0)\alpha}\chi) \right) + \text{const} \\ &= \frac{1}{2f_u(0)\alpha} \ln \left(1 + \cos(4\pi\sqrt{f_u(0)\alpha}\chi) \right) + \text{const} \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit der Bedingung $C_{\varepsilon_N}(0) = 1$ an die Konstante genau die in (3.3-12) angegebene Lösung. Zur Vereinfachung wird nun $\alpha \rightarrow 0$ durch $\beta \rightarrow 0$ mit $\beta = \sqrt{f_u(0)\alpha}$ ersetzt :

$$\begin{aligned} \ln \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\varepsilon_N}(\chi) \right) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{1 + \cos(4\pi\chi\beta)}{2} \right)}{2\beta^2} \stackrel{(H)}{=} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \sin(4\pi\chi\beta) \cdot 4\pi\chi}{\frac{1 + \cos(4\pi\chi\beta)}{2} \cdot 4\beta} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{-\sin(4\pi\chi\beta) \cdot \pi\chi}{2\beta} = -2\pi^2\chi^2 \end{aligned}$$

Voranehend steht (H) wieder für die Anwendung der l'Hospitalschen Regel. Mit der Feststellung

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\varepsilon_N}(\chi) = \exp(-2\pi\chi^2)$$

ist der Beweis abgeschlossen.

Voraussetzung $f_{u_N}(0) = 0, f''_{u_N}(0) \gg 0$

Nach (2.4-10a) gilt hier

$$\frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_u^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\sigma_u f''_{u_N}(0)}} \quad (3.3-14)$$

Mit Abbruch nach $f''_{u_N}(0)$ lautet die Differentialgleichung (3.3-9) dann so :

$$\frac{C'''_{\varepsilon_N}(\chi)}{C_{\varepsilon_N}(\chi)} = \frac{3(2\pi)^3}{f''_{u_N}(0)} \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi\chi\alpha}{\sigma_\infty}\right)}{\left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_u}\right)^3 \sin\left(\frac{2\pi\chi\alpha}{\sigma_\infty}\right)} \quad (3.3-15)$$

Der Grenzwert der rechten Seite für $\alpha \rightarrow 0$ kann mit der Beziehung (3.3-14) berechnet werden und es folgt schließlich

$$C'''_{\varepsilon_N}(\chi) = 3(2\pi)^4 \cdot \chi \cdot C_{\varepsilon_N}(\chi) \quad (3.3-16)$$

Diese Differentialgleichung 3. Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten ist nicht geschlossen lösbar. Offensichtlich enthält die Grenzverteilung aber keinen Dirac-Stoß, weil die exp-Funktion als dann notwendiger Teil der charakteristischen Funktion die Differentialgleichung (3.3-16) nicht erfüllt. Ebenso erfüllt die charakteristische Funktion der Normalverteilung die Differentialgleichung nicht.

Es wurden mehrere Methoden zur numerischen Auswertung der Differentialgleichung (3.3-16) verwendet (die hier nicht detailliert beschrieben werden sollen) mit dem Resultat, daß die Abweichung der Grenzverteilung zur Normalverteilung äußerst gering ist – in der Form der Verteilungsdichtefunktionen gibt es keine optisch deutlich erkennbaren Unterschiede.

3.3.3 Situation bei diskretem Signal u_k und Grenzverteilung bei $\alpha \rightarrow 0$

Die Methoden des voranstehenden Abschnittes für kontinuierliche Signale u_k sind für diskrete Signale u_k natürlich völlig ungeeignet. Da sich die Berechnung der Grenzverteilung im diskreten Fall schwieriger gestaltet, werden hier nur der Extremfall eines

binären Signals u_k und dann abschließend der andere Extremfall eines verschwindenden Signals u_k betrachtet.

In diesen Fällen ist es möglich (und andererseits auch notwendig), die Verteilungsdichtefunktion des Restsignals explizit in geschlossener Form zu berechnen. Dabei fällt dann auch der exakte Restfehler ab, auf den in Abschnitt 2.4.2 schon Bezug genommen wurde.

Nach (3.3-1) kann ε_k offensichtlich nur Vielfache von α als Werte annehmen. Somit kann die Verteilungsdichtefunktion von ε_k als Diracstoßfolge

$$f_{\varepsilon_k}(e) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot \delta(e - n\alpha) \quad \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n = 1 \quad , \quad f_n = f_{-n} \right) \quad (3.3-17)$$

mit unbekanntem Koeffizienten f_n (von α abhängig) angesetzt werden. Die f_n müssen natürlich den angegebenen Nebenbedingungen genügen. Aus (3.3-3) ergibt sich mit diesem Ansatz eine lineare Differenzgleichung :

$$f_n = F_u(\alpha(1-n))f_{n-1} + F_u(\alpha(1+n))f_{n+1} \quad (3.3-18)$$

Voraussetzung Das Signal u_k sei binär : $u_k \in \{-\sigma_u, +\sigma_u\}$

Daraus folgt $F_u(\xi) = 0, 1/2, 1$ für $\xi < -\sigma_u$, $|\xi| < \sigma_u$, $\xi > \sigma_u$. Mit der Größe $m_\alpha = \lceil \sigma_u/\alpha \rceil$ (kleinste obere ganzzahlige Grenze) gilt dann :

$$F_u(\alpha(1-n)) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n \leq -m_\alpha + 1 \\ 1/2 & -m_\alpha + 2 \leq n \leq m_\alpha \\ 0 & m_\alpha + 1 \leq n \end{array} \right\} \quad (3.3-19a)$$

$$F_u(\alpha(1+n)) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & n \leq -m_\alpha - 1 \\ 1/2 & -m_\alpha \leq n \leq m_\alpha - 2 \\ 1 & m_\alpha - 1 \leq n \end{array} \right\} \quad (3.3-19b)$$

Hiermit kann die Differenzgleichung (3.3-18) wie folgt geschrieben werden :

$$f_n = \left\{ \begin{array}{ll} f_{n-1} & n \leq -m_\alpha - 1 \\ f_{n-1} + f_{n+1}/2 & -m_\alpha \leq n \leq -m_\alpha + 1 \\ f_{n-1}/2 + f_{n+1}/2 & -m_\alpha + 2 \leq n \leq m_\alpha - 2 \\ f_{n-1}/2 + f_{n+1} & m_\alpha - 1 \leq n \leq m_\alpha \\ + f_{n+1} & m_\alpha + 1 \leq n \end{array} \right\} \quad (3.3-20)$$

Die Lösung dieser Differenzgleichung kann elementar ermittelt werden : Zunächst gilt $f_{m_\alpha+1} = f_{m_\alpha+2} = f_{m_\alpha+3} = \dots$ und aus den in (3.3-17) angegebenen Nebenbedingungen folgt damit $f_n = 0$ für $|n| \geq m_\alpha + 1$. Weiter gilt $f_0 = f_{-1}/2 + f_1/2 = f_1$

wegen $f_{-1} = f_1$. Aus $f_0 = f_1 = \dots = f_{i-1} = f_i$ folgt für $|i| \leq m_\alpha - 2$ nun $f_i = f_{i-1}/2 + f_{i+1}/2 = f_i/2 + f_{i+1}/2$ und somit $f_0 = \dots = f_i = f_{i+1}$. Insgesamt gilt also $f_{-m_\alpha+1} = \dots = f_0 = \dots = f_{m_\alpha-1}$. Aus $f_{m_\alpha-1} = f_{m_\alpha-2}/2 + f_{m_\alpha}$ folgt $f_{m_\alpha} = f_0/2$. Mit der Nebenbedingung aus (3.3-17) folgt $f_0 = 1/(2m_\alpha)$ und insgesamt :

$$f_n = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2m_\alpha} & |n| \leq m_\alpha - 1 \\ \frac{1}{4m_\alpha} & |n| = m_\alpha \\ 0 & |n| \geq m_\alpha + 1 \end{array} \right\} \quad (3.3-21)$$

Die Verteilung des Restsignals ist also eine abgetastete gleichmäßige Verteilung mit dem Maximalwert

$$\max |\varphi_k| = \max |\varepsilon_k| = \alpha \cdot m_\alpha \approx \sigma_u \quad (3.3-22)$$

und der Varianz

$$\sigma_\infty^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot (n\alpha)^2 = \frac{\alpha^2(2m_\alpha^2 + 1)}{6} > \frac{1}{3}\sigma_u^2 \quad (3.3-23)$$

Die obige Abschätzung folgt aus $m_\alpha \geq \sigma_u/\alpha$. Dieses Ergebnis ist in Bild 2.6 als e2-Kurve dargestellt. Es zeigt sich also, daß die Annahme eines normalverteilten Restsignals (e1-Kurve in Bild 2.6) bei einem diskreten Signal u_k zu einem völlig falschen Ergebnis führt.

Für $\alpha \rightarrow 0$ gilt $\alpha m_\alpha \rightarrow \sigma_u$ und somit

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\infty^2 = \frac{1}{3} \quad \text{d.h.} \quad R_\infty \geq -4.8 \text{ dB} \quad (3.3-24)$$

Auch für eine beliebig kleine Verstellgröße α kann der Restfehler also eine untere Schranke nicht unterschreiten.

In der diskreten Verteilung von ε_∞ konvergieren sowohl die Höhe $1/(2m_\alpha)$ wie der Abstand α der Dirac-Stöße für $\alpha \rightarrow 0$ jeweils gegen Null. Die Verteilung von ε_∞ konvergiert gegen die gleichmäßige Verteilung. Auch in diesem extremen Beispiel ist die Grenzverteilung für $\alpha \rightarrow 0$ kontinuierlich – allerdings nicht die Normalverteilung. Die Annahme einer Normalverteilung ist allenfalls bei $L \gg 1$ näherungsweise richtig. Die Ergebnisse hier sind völlig neu und unterstreichen erneut, daß die üblichen Annahmen und Methoden des wertkontinuierlichen Falls nicht unkritisch in allen Situationen auf die Q-Adaption übertragen werden dürfen. Die praktische Anwendung der Ergebnisse aus Kapitel 2 wird allerdings durch die jetzt neu gewonnenen Einsichten im Normalfall nicht tangiert.

Voraussetzung Das Signal u_k verschwindet : $u_k = 0$

Mit der gleichen Methode wie vorangehend ergibt sich $f_n = 0$ für $|n| \geq 2$ und $f_{-1} = f_1 = 1/4$, $f_0 = 1/2$. Somit gilt für die Verteilung von ε_∞ :

$$f_\varepsilon(e) = \frac{1}{4}\delta(e + \alpha) + \frac{1}{2}\delta(e) + \frac{1}{4}\delta(e - \alpha) \quad (3.3-25a)$$

$$f_{\varepsilon_N}(e) = \frac{1}{4}\delta(e + \sqrt{2}) + \frac{1}{2}\delta(e) + \frac{1}{4}\delta(e - \sqrt{2}) \quad (3.3-25b)$$

Für $\alpha \rightarrow 0$ bleibt die Grenzverteilung diskret. Für die Varianz des Restsignals gilt :

$$\sigma_\infty^2 = D^2\{\varepsilon_k\} = \frac{1}{2}\alpha^2 \quad \text{d.h.} \quad R_\infty^2 = \frac{1}{2}\alpha_u^2 \quad (3.3-26)$$

Im Gegensatz zum binären u_k gilt hier wieder $\sigma_\infty \rightarrow 0$ für $\alpha \rightarrow 0$. Dies ist natürlich selbstverständlich, weil ein verschwindendes u_k für die Adaption der günstigste Fall überhaupt ist. Die in Bild 2.6 unter der Annahme eines normalverteilten Restsignals dargestellte Kurve stimmt mit dem exakten Resultat aus (3.3-26) gut überein, obwohl die angenommene und die tatsächliche Restsignal-Verteilung sich stark unterscheiden.

Kapitel 4

Statistische Theorie der Quantisierung

Neben den adaptiven Filtern sind die A/D- und D/A-Wandler weitere wesentliche Quellen von Quantisierungsgeräuschen in digitalen Empfängern und verdienen somit besondere Beachtung. Der Einfluß derartiger Wandler wird in diesem Kapitel auf der Basis statistischer Methoden analysiert. Dabei können Quantisierungskennlinien mit äquidistanten Sprungstellen vorausgesetzt werden.

Die Grundlagen der statistischen Theorie der Quantisierung sind größtenteils wohlbekannt und stammen von Widrow [2.1], [2.2] mit Weiterentwicklungen in [2.3] und [2.8]. Es werden hier nur diejenigen Teile der Theorie in knapper Form zusammengestellt, die für die weiteren Rechnungen unbedingt notwendig sind.

4.1 Vorbemerkungen und Voraussetzungen

Wie in Abschnitt A.3 wird mit $Q(\cdot)$ die Quantisierungsfunktion bezeichnet. Der äquidistante Sprungstellen-Abstand q' und die Quantisierungsschrittweite q sollen übereinstimmen : $q = q'$. Ferner sei $Q(\cdot)$ vom Typ 1 gemäß Bild A.1, d.h. :

$$\begin{aligned} \text{Wertebereich von } Q &= \{nq \mid n \in \mathcal{Z}\} \\ Q(x) &= nq \quad \text{für } x \in \left(nq - \frac{q}{2}, nq + \frac{q}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.1-1}$$

Für eine einfache Formulierung der Theorie muß vorausgesetzt werden, daß Q unbeschränkt ist, d.h. n läuft von $-\infty$ bis $+\infty$. Praktisch kann Q natürlich auf den Maximalwert des zu quantisierenden Signals begrenzt werden. Dieses Signal wird in diesem Kapitel als eine zeitunabhängige Zufallsgröße x aufgefaßt.

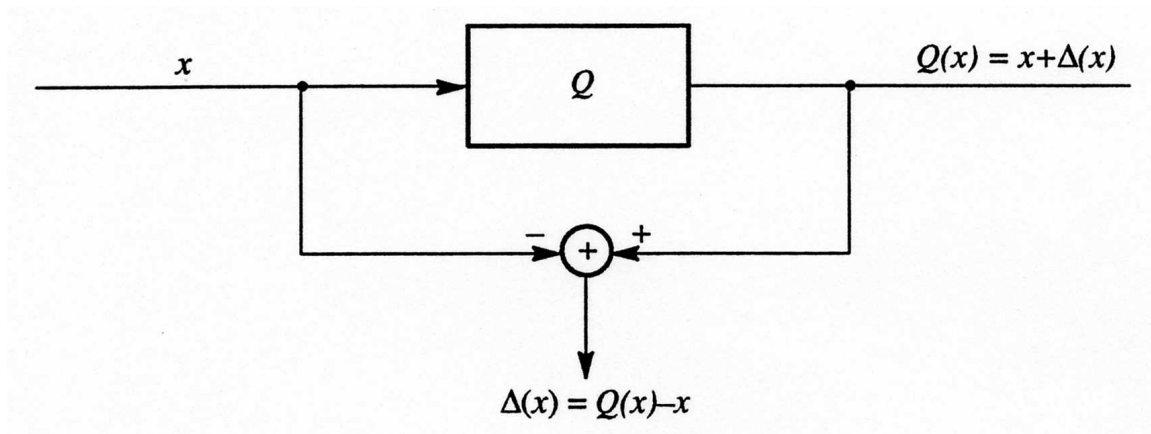


Bild 4.1: Darstellung des Quantisierungsfehlers

Das Ausgangssignal des Quantisierers ist die Zufallsgröße $Q(x)$, die ohne eigene Bezeichnung als Funktion von x geschrieben wird. Ebenfalls eine Zufallsgröße ist der Quantisierungsfehler

$$\Delta(x) = Q(x) - x \quad , \quad (4.1-2)$$

der offensichtlich beschränkt ist :

$$|\Delta(x)| \leq \frac{q}{2} \quad (4.1-3)$$

Damit ist wie in Bild 4.1 eine Darstellung des quantisierten Signals als Summe von Eingangssignal und Quantisierungsfehler gegeben – das explizite Rechnen mit den quantisierten Werten kann damit entfallen.

In der Literatur ist die Annahme einer gleichmäßigen Verteilung für $\Delta(x)$ im Intervall $[-q/2, q/2]$ allgemein üblich, siehe beispielsweise [2.9]. Tatsächlich ist diese Annahme im allgemeinen zumindest näherungsweise erfüllt.

Ebenfalls üblich aber falsch ist die Annahme der statistischen Unabhängigkeit von x und $\Delta(x)$, obwohl sich damit das Weiterrechnen enorm vereinfachen würde. Schon die Bezeichnung soll aber deutlich machen, daß $\Delta(x)$ eine Funktion von x ist und somit keinesfalls unabhängig von x sein kann. Wenn x wertkontinuierlich ist (d.h. eine Verteilungsdichtefunktion ohne Dirac-Stöße hat), so ist auch $\Delta(x)$ wertkontinuierlich. Die Annahme der Unabhängigkeit würde dann auch die Summe $x + \Delta(x) = Q(x)$ als wertkontinuierlich ergeben, obwohl $Q(x)$ doch wertdiskret ist.

4.2 Darstellungen für $Q(x)$ und $\Delta(x)$

Zunächst werden die Verteilungsdichtefunktionen und die charakteristischen Funktionen für $Q(x)$ und $\Delta(x)$ berechnet und daraus ergeben sich dann wichtige Formeln für $E\{\Delta^2(x)\}$ und $E\{x\Delta(x)\}$.

Satz 4.1 Für die charakteristische Funktion des quantisierten Signals $Q(x)$ gilt folgende Darstellung :

$$C_{Q(x)}(\chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_x\left(\chi - \frac{n}{q}\right) \cdot \text{si}\left(\pi q\left(\chi - \frac{n}{q}\right)\right) \quad (4.2-1)$$

Beweis Für die Verteilungsdichtefunktion von $Q(x)$ gilt offensichtlich :

$$\begin{aligned} f_{Q(x)}(\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\left\{x \in \left(nq - \frac{q}{2}, nq + \frac{q}{2}\right)\right\} \cdot \delta(\xi - nq) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[F_x\left(nq + \frac{q}{2}\right) - F_x\left(nq - \frac{q}{2}\right)\right] \cdot \delta(\xi - nq) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[F_x\left(\xi + \frac{q}{2}\right) - F_x\left(\xi - \frac{q}{2}\right)\right] \cdot \delta(\xi - nq) \\ &= \left(F_x(\xi) \star \left[\delta\left(\xi + \frac{q}{2}\right) - \delta\left(\xi - \frac{q}{2}\right)\right]\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - nq) \end{aligned} \quad (4.2-2)$$

Mit der Beziehung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - nq) \quad \circ \bullet \quad \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\chi - \frac{n}{q}\right) \quad (4.2-3)$$

und dem Zusammenhang (A.1-6) ergibt sich die Darstellung

$$C_{Q(x)}(\chi) = \left(\left(\frac{C_x(\chi)}{j2\pi\chi} + \frac{1}{2}\delta(\chi)\right) \cdot 2j \sin(\pi q\chi)\right) \star \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\chi - \frac{n}{q}\right)$$

Hieraus folgt sofort (4.2-1) und damit ist der Beweis abgeschlossen.

Satz 4.2 Für die Verteilungsdichtefunktion des Quantisierungsfehlers gilt

$$f_{\Delta(x)}(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{q}\right) \cdot \left[f_x(-\xi) \star \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - nq) \right] \quad (4.2-4)$$

$$= \text{rect}\left(\frac{\xi}{q}\right) \cdot \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_x\left(-\frac{n}{q}\right) \exp(j2\pi\xi\frac{n}{q}) \quad (4.2-5)$$

und für die charakteristische Funktion gilt :

$$C_{\Delta(x)}(\chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_x\left(-\frac{n}{q}\right) \text{si}\left(\pi q\left(\chi - \frac{n}{q}\right)\right) \quad (4.2-6)$$

Beweis Für die Verteilungsfunktion von $\Delta(x)$ gilt für $|\xi| < q/2$:

$$\begin{aligned} F_{\Delta(x)}(\xi) &= P\left\{\Delta(x) \leq \xi\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\left\{\Delta(x) \leq \xi \wedge x \in \left(nq - \frac{q}{2}, nq + \frac{q}{2}\right)\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\left\{x \in \left(nq - \xi, nq + \frac{q}{2}\right)\right\} \\ &= F_x\left(nq + \frac{q}{2}\right) - F_x(nq - \xi) \end{aligned} \quad (4.2-7)$$

Differentiation von (4.2-7) ergibt :

$$f_{\Delta(x)}(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{q}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_x(nq - \xi) = \text{Formel (4.2-4)}$$

Fourier-Transformation von (4.2-4) ergibt mit Hilfe von (A.1-7) und (4.2-3) :

$$\begin{aligned} C_{\Delta(x)}(\chi) &= q \text{si}(\pi q\chi) \star \left[C_x(-\chi) \cdot \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\chi - \frac{n}{q}\right) \right] \\ &= \text{si}(\pi q\chi) \star \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_x\left(-\frac{n}{q}\right) \delta\left(\chi - \frac{n}{q}\right) = \text{Formel (4.2-6)} \end{aligned} \quad (4.2-8)$$

Inverse Fourier-Transformation von (4.2-6) ergibt schließlich (4.2-5) und damit ist der Beweis beendet.

Satz 4.3 Es gelten generell folgende Formeln :

$$E\{\Delta^2(x)\} = q^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} C_x\left(\frac{n}{q}\right) \right) \quad (4.2-9)$$

$$E\{x \cdot \Delta(x)\} = \frac{-q}{4\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} C'_x\left(\frac{n}{q}\right) \quad (4.2-10)$$

Beweis Zunächst wird für $\text{si}(\xi) = \sin(\xi)/\xi$ vermerkt :

	si(πn) =	si'(πn) =	si''(πn) =
$n \neq 0$	0	$\frac{(-1)^n}{\pi n}$	$\frac{-2(-1)^n}{\pi^2 n^2}$
$n = 0$	1	0	$\frac{-1}{3}$

(4.2-11)

Gemäß (A.1-5) folgt durch 2-faches Differenzieren von (4.2-6) :

$$E\{\Delta^2(x)\} = \frac{-1}{4\pi^2} C''_{\Delta(x)}(0) = \frac{-q^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_x\left(-\frac{n}{q}\right) \text{si}''(-\pi n) = \text{Formel (4.2-9)}$$

In gleicher Weise folgt aus (4.2-1) :

$$\begin{aligned} E\{Q^2(x)\} &= \frac{-1}{4\pi^2} C''_{Q(x)}(0) \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[C''_x\left(-\frac{n}{q}\right) \text{si}(-\pi n) + 2\pi q C'_x\left(-\frac{n}{q}\right) \text{si}'(-\pi n) + \pi^2 q^2 C_x\left(-\frac{n}{q}\right) \text{si}''(-\pi n) \right] \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} \left[C''_x(0) + 2q \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} C'_x\left(-\frac{n}{q}\right) \frac{(-1)^n}{n} + \pi^2 q^2 \cdot \frac{4}{-q^2} E\{\Delta^2(x)\} \right] \\ &= E\{x^2\} - \frac{q}{2\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} C'_x\left(-\frac{n}{q}\right) \frac{(-1)^n}{n} + E\{\Delta^2(x)\} \end{aligned}$$

Der Vergleich dieses Ergebnisses mit

$$E\{Q^2(x)\} = E\{(x + \Delta(x))^2\} = E\{x^2\} + 2E\{x\Delta(x)\} + E\{\Delta^2(x)\}$$

ergibt (4.2-10) und damit ist der Beweis beendet.

Beispiel Es sei x normalverteilt : $x \sim N(0, \sigma^2)$. Dann gilt

$$E\{x\Delta(x)\} = 2\sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-2\pi\sigma^2 n^2/q^2)$$

Offensichtlich gilt $E\{x\Delta(x)\} \rightarrow 0$ für $\sigma/q \rightarrow \infty$, d.h. für zunehmende Streuung oder abnehmende Quantisierungsschrittweite sind eine normalverteilte Zufallsgröße und der Quantisierungsfehler nahezu unkorreliert – allerdings nie exakt unkorreliert. Ausführlicher wird dieses Beispiel in [2.3] behandelt.

4.3 Die Quantisierungstheoreme

Aus dem quantisierten Signal $Q(x)$ kann das ursprüngliche Signal x natürlich nie exakt wiedergewonnen werden. Jedoch ist es möglich, aus den statistischen Eigenschaften von $Q(x)$ auf die statistischen Eigenschaften von x zurückzuschließen. Selbstverständlich müssen dazu aber gewisse Voraussetzungen erfüllt sein, die nachfolgend definiert werden :

In Bezug auf eine Quantisierungsschrittweite q erfüllt die Zufallsgröße x die Eigenschaft

$$\mathbf{QT}, \quad \text{wenn gilt :} \quad C_x(\chi) = 0 \quad \text{für} \quad |\chi| \geq \frac{1}{2q}$$

$$\mathbf{QT/2}, \quad \text{wenn gilt :} \quad C_x(\chi) = 0 \quad \text{für} \quad |\chi| \geq \frac{1}{q}$$

$$\mathbf{QT1}, \quad \text{wenn gilt :} \quad C_x\left(\frac{n}{q}\right) = C'_x\left(\frac{n}{q}\right) = 0 \quad \text{für} \quad n \neq 0$$

$$\mathbf{QT0}, \quad \text{wenn gilt :} \quad C_x\left(\frac{n}{q}\right) = 0 \quad \text{für} \quad n \neq 0$$

QT steht für *Quantisierungstheorem*. In der oben aufgeführten Reihenfolge werden die Voraussetzungen immer schwächer.

Die Eigenschaft QT bedeutet, daß die Verteilungsdichtefunktion von x bandbegrenzt ist, d.h. eine hinreichend "glatte" Funktion ist. Konstante oder quantisierte Signale erfüllen diese Bedingung natürlich nicht, da ihre Verteilungsdichtefunktion aus Dirac-Stößen besteht. Kein physikalisches Signal kann QT exakt erfüllen, da aus der Unendlichkeit des Zeit-Bandbreite-Produkts folgt, daß das Signal oberhalb jeder

Schranke immer noch Anteile haben müßte. Normalverteilte Signale erfüllen QT jedoch näherungsweise sehr gut, da ihre charakteristische Funktion schnell abklingt. Exakt wird QT durch die Verteilungsdichtefunktion $q/2 \cdot \text{si}^2(\pi q\xi/2)$ erfüllt, da die zugehörige charakteristische Funktion die Dreiecksverteilung ist. Allerdings existiert in diesem Beispiel schon das zweite Moment nicht.

QT0 ist eine wesentlich schwächere Forderung als QT, die von vielen Signalen erfüllt wird. Beispielsweise sei x_1 ein beliebiges und x_2 ein davon unabhängiges Signal, das in $[-q/2, q/2]$ gleichmäßig verteilt ist. Dann wird QT0 von $x = x_1 + x_2$ erfüllt, weil $C_x(\chi) = C_{x_1}(\chi) \cdot C_{x_2}(\chi)$ und $C_{x_2}(n/q) = \text{si}(\pi n)$ gilt.

Generell gilt : Je feiner die Quantisierung ist (d.h. je kleiner q wird), desto besser sind QT und QT/2 erfüllt. Das gilt auch für QT1 und QT0, wenn man von Sonderfällen (z.B. gleichmäßig verteilte Signale) absieht.

4.3.1 Bedingungen für eine Quantisierung ohne Informationsverlust in den Verteilungen

Satz 4.4 Quantisierungstheorem :

(a) Wenn die Zufallsgröße x QT erfüllt, so ist aus der Verteilungsdichtefunktion von $Q(x)$ die Verteilungsdichtefunktion von x gewinnbar.

(b) Wenn die Zufallsgröße x QT/2 erfüllt, so sind aus den Momenten von $Q(x)$ die Momente von x gewinnbar.

Beweis (a) Aufgrund der Voraussetzung QT kann (4.2-1) in der Form

$$C_{Q(x)}(\chi) = C_x(\chi) \cdot \text{si}(\pi q\chi) \quad \text{für} \quad |\chi| < \frac{1}{2q} \quad (4.3-1)$$

geschrieben werden und somit gilt :

$$C_x(\chi) = \text{rect}(q\chi) \cdot \frac{C_{Q(x)}(\chi)}{\text{si}(\pi q\chi)} \quad (4.3-2)$$

(b) Die Gleichung (4.3-1) gilt nach Voraussetzung QT/2 in einer Umgebung von 0 und somit ergeben sich die Ableitungen von $C_x(\chi)$ an der Stelle 0 aus den Ableitungen von $C_{Q(x)}(\chi)$. Damit ist der Beweis beendet.

Satz 4.4(a) kann auch aus dem Abtasttheorem [6.3] abgeleitet werden. Dazu wird

$$w(\xi) = f_x(\xi) \star \text{rect}\left(\frac{\xi}{q}\right) \quad \circ\text{---}\bullet \quad C_x(\chi) \cdot q \text{si}(\pi q \chi)$$

definiert und wegen

$$w(nq) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(\xi) \text{rect}\left(\frac{nq - \xi}{q}\right) d\xi = \int_{nq - q/2}^{nq + q/2} f_x(\xi) d\xi = F_x(nq + \frac{q}{2}) - F_x(nq - \frac{q}{2})$$

folgt sofort aus (4.2-2) :

$$f_{Q(x)}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(nq) \delta(\xi - nq) \quad (4.3-3)$$

Die Voraussetzung QT für $f_x(\xi)$ bedeutet für $w(\xi)$ die gleiche "Bandbegrenzung", so daß das Abtasttheorem anwendbar ist :

$$w(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(nq) \text{si}\left(\pi \frac{\xi - nq}{q}\right) = \text{si}\left(\pi \frac{\xi}{q}\right) \star \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(nq) \delta(\xi - nq) = \text{si}\left(\pi \frac{\xi}{q}\right) \star f_{Q(x)}(\xi) \quad (4.3-4)$$

Durch Fourier-Transformation der äußeren Terme dieser Gleichung folgt

$$C_x(\chi) \cdot q \text{si}(\pi q \chi) = q \text{rect}(q \chi) \cdot C_{Q(x)}(\chi)$$

und dies entspricht genau (4.3-2).

4.3.2 Bedingungen für einen gleichmäßig verteilten Quantisierungsfehler

Satz 4.5 Der Quantisierungsfehler $\Delta(x)$ hat in $[-q/2, q/2]$ dann und nur dann eine gleichmäßige Verteilung, wenn die Zufallsgröße x QT0 erfüllt. In diesem Fall gilt dann:

$$C_{\Delta(x)}(\chi) = \text{si}(\pi q \chi) \quad , \quad D^2\{\Delta(x)\} = \frac{q^2}{12} \quad (4.3-5)$$

Beweis (1) Aus QT0 und (4.2-6) folgt sofort (4.3-5) und somit ist $\Delta(x)$ gleichmäßig verteilt. (2) Umgekehrt gelte nun (4.3-5). Aus (4.2-6) folgt die Bedingung

$$0 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} C_x\left(-\frac{n}{q}\right) \text{si}\left(\pi q \left(\chi - \frac{n}{q}\right)\right) \quad (4.3-6)$$

und daraus folgt zwingend QT0, womit der Beweis beendet ist.

Die rechte Seite der Gleichung (4.3-6) gibt an, wie stark die Verteilungsdichtefunktion $f_{\Delta(x)}(\xi)$ des Quantisierungsfehlers von der gleichmäßigen Verteilung abweicht, wenn QT0 nur näherungsweise erfüllt ist.

4.3.3 Bedingungen für die Unkorreliertheit von Signal und Quantisierungsfehler

Die Unkorreliertheit erfordert etwas stärkere Voraussetzungen als zur gleichmäßigen Verteilung von $\Delta(x)$ notwendig sind. Aus (4.2-10) folgt sofort die erste Aussage des folgenden Satzes und die anderen Aussagen sind simple Folgerungen daraus :

Satz 4.6 Die Zufallsgröße x erfülle QT1. Dann gilt :

$$E\{x \cdot \Delta(x)\} = 0 \quad \text{d.h. } x \text{ und } \Delta(x) \text{ sind unkorreliert} \quad (4.3-7a)$$

$$E\{x \cdot Q(x)\} = E\{x^2\} \quad (4.3-7b)$$

$$E\{\Delta(x) \cdot Q(x)\} = E\{\Delta^2(x)\} = \frac{q^2}{12} \quad (4.3-7c)$$

$$E\{Q^2(x)\} = E\{x^2\} + \frac{q^2}{12} \quad (4.3-7d)$$

4.4 Quantisierung eines Summensignals mit statistisch unabhängigen Komponenten

Es wird nun vorausgesetzt, daß das zu quantisierende Signal in zwei statistisch unabhängige Komponenten zerfällt :

$$x = x_a + x_b \quad \text{mit : } \begin{array}{l} x_a \text{ und } x_b \text{ sollen statistisch} \\ \text{unabhängig sein} \end{array} \quad (4.4-1)$$

Wegen $C_x(\chi) = C_{x_a}(\chi) \cdot C_{x_b}(\chi)$ gilt :

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } x_a \text{ eine der QT-Eigenschaften aus Abschnitt 4.3 erfüllt,} \\ \text{so wird diese Eigenschaft auch von } x = x_a + x_b \text{ bei beliebigem} \\ \text{aber statistisch unabhängigem } x_b \text{ erfüllt.} \end{array} \quad (4.4-2)$$

Für die bedingte charakteristische Funktion gilt :

$$\begin{aligned}
C_{x|x_a}(\chi|\xi_a) &= E\{\exp(-j2\pi\chi(x_a + x_b)) \mid x_a = \xi_a\} \\
&= E\{\exp(-j2\pi\chi(\xi_a + x_b)) \mid x_a = \xi_a\} \\
&= \exp(-j2\pi\chi\xi_a) \cdot E\{\exp(-j2\pi\chi x_b) \mid x_a = \xi_a\} \\
&= \exp(-j2\pi\chi\xi_a) \cdot E\{\exp(-j2\pi\chi x_b)\} \\
&= \exp(-j2\pi\chi\xi_a) \cdot C_{x_b}(\chi)
\end{aligned} \tag{4.4-3}$$

Die statistische Unabhängigkeit von x_a und x_b geht hier beim Übergang von der dritten zur vierten Zeile ein.

4.4.1 Bedingungen für die paarweise statistische Unabhängigkeit der Summsignal-Komponenten vom Quantisierungsfehler

In der Formel (4.2-5) wird nun die Verteilungsdichtefunktion von $\Delta(x) = \Delta(x_a + x_b)$ unter der Bedingung $x_a = \xi_a$ betrachtet. Mit Hilfe von (4.4-3) folgt :

$$\begin{aligned}
f_{\Delta(x)|x_a}(\xi|\xi_a) &= \text{rect}\left(\frac{\xi}{q}\right) \cdot \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{x|x_a}\left(-\frac{n}{q}|\xi_a\right) \exp(j2\pi\xi\frac{n}{q}) \\
&= \text{rect}\left(\frac{\xi}{q}\right) \cdot \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{x_b}\left(-\frac{n}{q}\right) \exp(j2\pi(\xi_a + \xi)\frac{n}{q})
\end{aligned} \tag{4.4-4}$$

Wenn x_b die Eigenschaft QT0 erfüllt, so gilt $f_{\Delta(x)|x_a}(\xi|\xi_a) = \text{rect}(\xi/q)/q$ nach (4.4-4) und deshalb folgt :

Satz 4.7 Es seien x_a und x_b weiterhin statistisch unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt :

- (a) Wenn x_b die Eigenschaft QT0 erfüllt, so ist $\Delta(x_a + x_b)$ von x_a statistisch unabhängig und gleichmäßig verteilt.
- (b) Wenn sowohl x_a und x_b die Eigenschaft QT0 erfüllen, so sind $x_a, x_b, \Delta(x_a + x_b)$ drei paarweise statistisch unabhängige Zufallsvariablen, die aber nicht vollständig unabhängig sind.

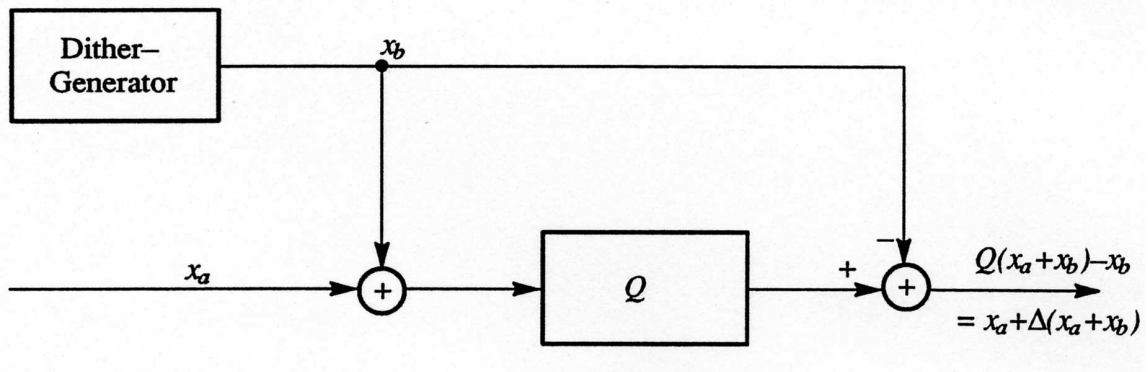


Bild 4.2: Quantisierung mit Dither-Signal

Die vollständige statistische Unabhängigkeit der drei Zufallsvariablen bei Satz 4.7(b) würde die statistische Unabhängigkeit von $\Delta(x_a + x_b)$ und $x_a + x_b$ implizieren, was aber nach den Bemerkungen in Abschnitt 4.1 offensichtlich falsch ist.

4.4.2 Quantisierung mit Dither-Signalen

Satz 4.7 liefert das Grundprinzip für die Quantisierung mit einem “Dither”-Signal [2.7], wie es in Bild 4.2 dargestellt ist. Dem zu quantisierenden Signal x_a wird ein synthetisch erzeugtes Dither-Signal x_b überlagert, das QT0 erfüllt – beispielsweise kann für x_b eine gleichmäßige Verteilung gewählt werden. Für ein beliebiges x_a ist dann $\Delta(x_a + x_b)$ gleichmäßig verteilt und statistisch unabhängig von x_a , d.h. die Quantisierung wird modelliert durch Addition eines statistisch unabhängigen Störsignals. Ohne x_b wäre dieses Störsignal aber statistisch abhängig.

Allerdings paßt die Methode einer Quantisierung mit Dither-Signal schlecht zu einer digitalen Implementierung, wenn $Q(\cdot)$ die Bedeutung eines A/D-Wandlers für ein analoges Signal x_a hat : Wenn x_b analog erzeugt wird, so muß bei der hinteren Additionsstelle ein wertdiskretes mit einem analogen Signal verknüpft werden. Wenn andererseits x_b wertdiskret (natürlich in feinerer Auflösung als $Q(\cdot)$) erzeugt wird, so muß bei der vorderen Additionsstelle ein wertdiskretes mit einem analogen Signal verknüpft werden.

Bei manchen Anwendungen kann auf die Subtraktion des Dither-Signals vom quantisierten Signal verzichtet werden, wenn beim quantisierten Signal nur gewisse statistische Eigenschaften interessieren. In [2.4], [2.5] wird untersucht, welche statistischen Eigenschaften des Signals nach der Quantisierung mit einem Dither-Signal erhalten bleiben, wenn $Q(\cdot)$ bis auf die Sign-Funktion reduziert wird.

Am Ende dieses Kapitels soll betont werden, daß in den Kapiteln 2 und 3 die Quanti-

sierung der Verstellsinformation der adaptiven Filter ganz andere Bedingungen an die Signale stellt als die hier behandelte Quantisierung. In diesem Kapitel muß die Verteilungsdichtefunktion möglichst bandbegrenzt sein, während bei den wertdiskreten Adaptionungsverfahren die Werte der Verteilungsdichtefunktion an den Sprungstellen der Quantisierungskennlinie möglichst groß sein sollen. Allerdings sind die Voraussetzungen und Ziele auch nicht miteinander vergleichbar : Hier liegt der Schwerpunkt auf äquidistanten hochauflösenden Quantisierern, während bei den Adaptionungsverfahren eine optimale Verteilung der Sprungstellen des Quantisierers gesucht ist und $Q(\cdot)$ möglichst bis zur Sign-Funktion reduziert werden soll.

Kapitel 5

Berechnung der Störleistungen in einem speziellen Vollduplex-Empfänger

Im ersten Teil dieser Arbeit wurde das Verhalten der wertdiskreten variablen Filter bei verschiedenen Adaptionsverfahren theoretisch analysiert. Der zweite Teil beschäftigt sich nun konkret mit speziellen Empfängern für die Datenübertragung. Bei diesen Empfängern wird die Übertragungsgüte üblicherweise mit der Fehlerwahrscheinlichkeit erfaßt. Ein sinnvolles Ziel ist also die Berechnung dieser Fehlerwahrscheinlichkeit unter besonderer Berücksichtigung der wertdiskreten Signalverarbeitung. Wesentliche Bausteine im Empfänger – sowohl hinsichtlich des Realisierungsaufwandes wie des Einflusses auf die Fehlerwahrscheinlichkeit – sind die adaptiven Filter und die A/D- bzw. D/A-Wandler.

Auf eine Formulierung in möglichst großer Allgemeinheit wird jetzt verzichtet, weil sonst die Darstellungen zu schwerfällig werden. Im wesentlichen wird nur ein Beispiel betrachtet – und zwar ein Basisbandempfänger für eine Vollduplex-Datenübertragung nach dem Echokompensationsprinzip. Dabei liegen die gleichen Voraussetzungen vor wie z.B. in [4.5]. Eine konkrete Anwendung ist die U-Schnittstelle im ISDN, und die dabei auftretenden Signalverhältnisse werden hier auch größenordnungsmäßig vorausgesetzt. Eine Übertragung der Ergebnisse und Rechenmethoden von diesem Beispiel auf andere Empfänger macht dann keine besonderen Schwierigkeiten mehr.

Für den hier spezifizierten Empfänger werden zunächst die Störleistungen berechnet und anschließend erfolgen ausführliche Vergleiche zwischen der Theorie und den Simulationsergebnissen. In Kapitel 6 werden dann die Wortlängen in diesem Empfänger nach der Fehlerwahrscheinlichkeit dimensioniert.

5.1 Modell des Empfängers

In Bild 5.1 ist in starker Vereinfachung ein Vollduplex-Empfänger nach dem Echokompensationsprinzip angegeben, wie er im ganzen zweiten Teil dieser Arbeit durchgehend betrachtet wird. Ein derartiger Empfänger wird z.B. auch in [3.2] untersucht, so daß die Darstellung der prinzipiellen Funktionsweise hier knapp gehalten werden kann.

Der Empfänger enthält zwei Kompensationsfilter : einen Echolöcher (EC = echo canceler) und einen entscheidungsrückgekoppelten Entzerrer (DFE = decision feedback equalizer). Die Funktion dieser beiden Filter wurde schon in Abschnitt 1.4 beschrieben. Von entscheidender Bedeutung für eine aufwandsgünstige Dimensionierung des Empfängers sind die Wortlängen des A/D-Wandlers und der Koeffizienten der beiden adaptiven Filter. Für die Realisierung erweist sich der EC im Vergleich zum DFE als aufwendiger und wird deshalb hier auch intensiver behandelt. Für die Schreibweise wird vereinbart, daß ohne Indizierung immer der EC gemeint ist (Beispiel : $\hat{y}_k =$ EC-Ausgang und $\hat{y}_{\text{DFE},k} =$ DFE-Ausgang).

Im Sendezweig erzeugt der Leitungscodierer die Sendewerte a_k , die sowohl dem Sendefilter (SF) wie dem Echolöcher zugeführt werden. Im Empfangszweig erfolgt hinter dem Empfangsfilter (EF) die Abtastung (SH = sample and hold). Das abgetastete Empfangssignal $x_k + y_k + n_k$ setzt aus folgenden Anteilen zusammen :

- x_k = Antwort des Übertragungskanals auf die gesendete Datenfolge b_k des fernen Teilnehmers (Nutzsinal)
(bei Bild 1.1 war dieses Signal identisch mit dem nicht-kompensierbaren Signal – jetzt muß jedoch zur Unterscheidung x_k für das Nutzsinal und u_k für das nicht-kompensierbare Signal geschrieben werden)
- y_k = Echosignal, abhängig von der eigenen Datenfolge a_k
- n_k = additives weißes es gaußsches Rauschsignal

Der A/D-Wandler mit der Quantisierungskennlinie $Q_{\text{AD}}(\cdot)$ ist vor der Echokompensationsstelle angeordnet. Der dabei entstehende Quantisierungsfehler wird mit

$$\delta_{\text{AD},k} = \Delta_{\text{AD}}(x_k + y_k + n_k) = Q_{\text{AD}}(x_k + y_k + n_k) - (x_k + y_k + n_k) \quad (5.1-1)$$

bezeichnet, so daß nach der A/D-Wandlung die Werte $x_k + y_k + n_k + \delta_{\text{AD},k}$ vorliegen. Nach der EC-Kompensationsstelle ergibt sich somit das Signal :

$$\underbrace{x_k + n_k + \delta_{\text{AD},k}}_{= u_k} + \underbrace{y_k - \hat{y}_k}_{= \varphi_k} = u_k + \varphi_k \quad (5.1-2)$$

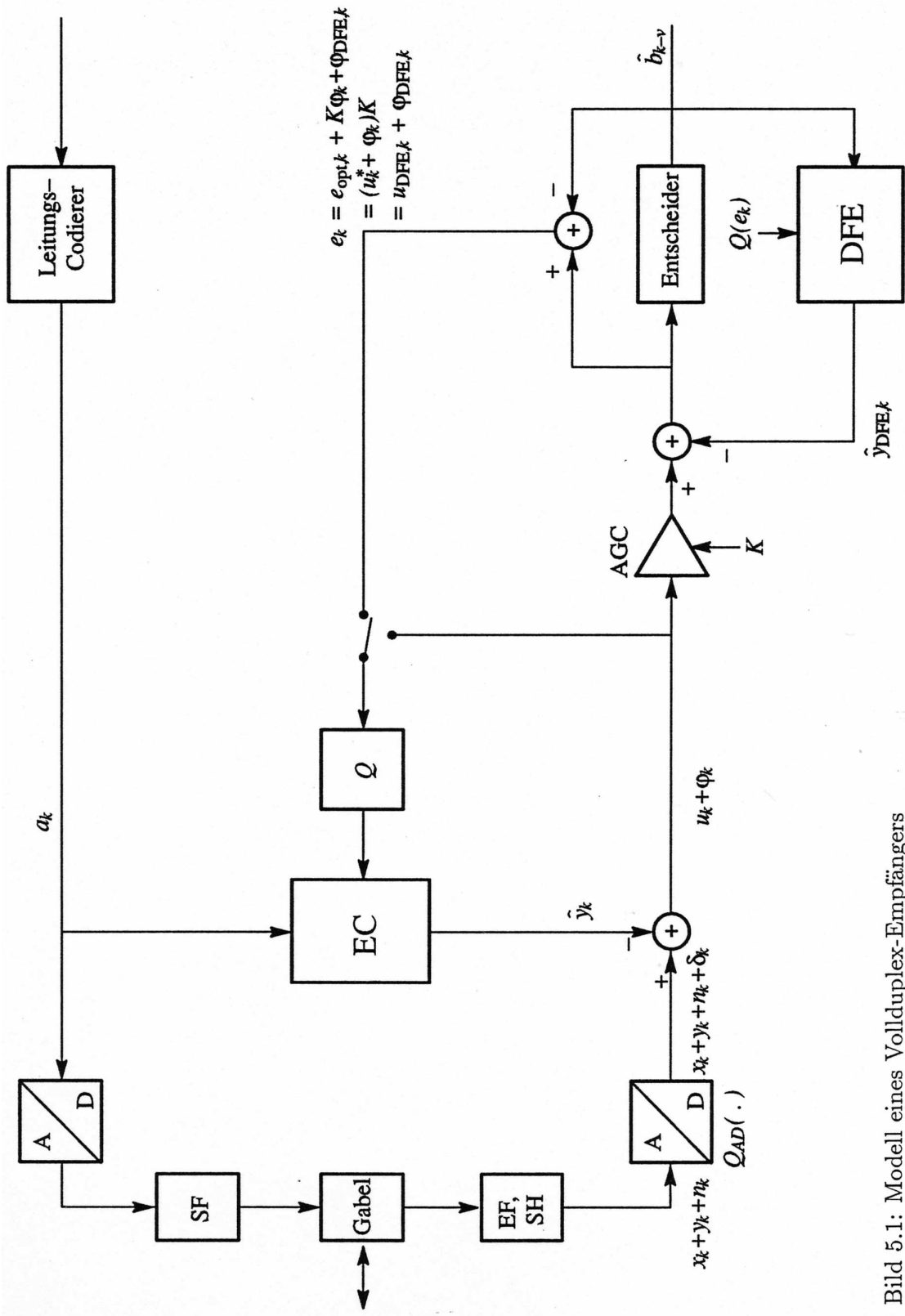


Bild 5.1: Modell eines Voll duplex-Empfängers

Das nicht-kompensierbare Signal $u_k = x_k + n_k + \delta_{AD,k}$ besteht im wesentlichen aus dem Nutzsignal x_k des fernen Teilnehmers, aber die anderen kleineren Anteile in u_k dürfen nicht vernachlässigt werden.

Das Signal x_k wird wie in Abschnitt 1.4.2 in Vorschwinger, Hauptschwinger und Nachschwinger zerlegt : $x_k = x_{Vor,k} + x_{Haupt,k} + x_{Nach,k}$. Die Pegelregelung (AGC = automatic gain control) bewirkt eine Verstärkung um den Faktor K derart, daß $K \cdot x_{Haupt,k} = b_{k-v}$ gilt (K ist also der inverse Wert des Hauptwertes der Impulsantwort und v ist die entsprechende Verzögerung dieses Hauptwertes).

Der Entscheider ist ein einfacher gedächtnisloser Schwellwertentscheider. Die Werte \hat{b}_{k-v} an seinem Ausgang sind Schätzungen für die Sendefolge b_{k-v} des fernen Teilnehmers.

Die Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit $P\{\hat{b}_{k-v} \neq b_{k-v}\}$ ist das Ziel im nächsten Kapitel. Eine geringe Anzahl von Fehlentscheidungen (z.B. weniger als 1 %) behindert die adaptive Einstellung der Koeffizienten nicht wesentlich. Für die Berechnung der von den adaptiven Filtern verursachten Störleistungen kann deshalb die Fehlerwahrscheinlichkeit hier als Null angenommen werden, also $\hat{b}_{k-v} = b_{k-v}$. Umgekehrt muß jedoch der Einfluß der Störleistungen auf die Fehlerwahrscheinlichkeit in Kapitel 6 sehr genau berücksichtigt werden.

Der DFE mit dem Ausgangssignal $\hat{y}_{DFE,k}$ kompensiert (wie in Abschnitt 1.4.2 beschrieben) die mit K verstärkten Nachschwinger im Signal x_k . Bei ungenauer Koeffizienten-Einstellung verbleibt also ein Fehler

$$\varphi_{DFE,k} = K x_{Nach,k} - \hat{y}_{DFE,k} \quad (5.1-3)$$

Als *Entscheiderfehler* e_k wird die Differenz zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal des Entscheiders bezeichnet (nicht zu verwechseln mit Fehlentscheidungen). Bei richtigen Entscheidungen gilt dann :

$$e_k = \underbrace{K(x_{Vor,k} + n_k + \delta_{AD,k})}_{= e_{opt,k}} + K\varphi_k + \varphi_{DFE,k} \quad (5.1-4)$$

$$= K \left(\underbrace{x_{Vor,k} + n_k + \delta_{AD,k} + \frac{1}{K}\varphi_{DFE,k}}_{= u_k^*} \right) + K\varphi_k = K(u_k^* + \varphi_k) \quad (5.1-5)$$

$$= \underbrace{K(x_{Vor,k} + n_k + \delta_{AD,k} + \varphi_k)}_{= u_{DFE,k}} + \varphi_{DFE,k} \quad (5.1-6)$$

Dabei ist $e_{opt,k}$ derjenige Entscheiderfehler, der bei optimaler Einstellung der EC- und DFE-Koeffizienten entsteht.

Nach (5.1-5) ist in e_k das EC-Restsignal $\varphi_k = y_k - \hat{y}_k$ unverfälscht enthalten und die dabei überlagernden Komponenten werden mit u_k^* bezeichnet. Zur Adaption des EC kann nun entweder das Signal $u_k + \varphi_k$ nach der Kompensationsstelle oder der Entscheiderfehler $e_k = K(u_k^* + \varphi_k)$ verwendet werden. Die Größenordnung von u_k ist durch x_k und die Größenordnung von u_k^* ist durch $x_{\text{Vor},k}$ gegeben, so daß bei Verwendung des Entscheiderfehlers zur EC-Adaption erheblich günstigere Verhältnisse zu erwarten sind.

Der Vergleich der EC-Adaption mit u_k bzw. u_k^* zeigt, daß der Begriff des nicht-kompensierbaren Signals sich auf die Verstellinformation und nicht auf das Signal direkt nach der Kompensationsstelle beziehen muß.

Der Quantisierer $Q(\cdot)$ in Bild 5.1 soll die Quantisierungsschrittweite (Abstand der quantisierten Werte) q und äquidistante Sprungstellen im Abstand q' haben. $Q(\cdot)$ erzeugt für die Q-Adaption des EC die quantisierte Verstellinformation $Q(u_k + \varphi_k)$ bzw. $Q(e_k) = Q(K(u_k^* + \varphi_k))$. Natürlich wird $Q(e_k)$ auch für die Q-Adaption des DFE verwendet.

Die DFE-Adaption wird nur kurz erläutert : Gemäß (5.1-6) wird mit $u_{\text{DFE},k}$ der für den DFE nicht-kompensierbare Signalanteil bezeichnet. Bei gemeinsamer Adaption von EC und DFE mit dem Entscheiderfehler e_k sind die beiden adaptiven Filter verkoppelt :

- Bei der EC-Adaption mit $e_k = K(u_k^* + \varphi_k)$ ist u_k^* von $\varphi_{\text{DFE},k}$ und somit von der aktuellen Genauigkeit der DFE-Einstellung abhängig.
- Umgekehrt ist bei der DFE-Adaption mit $e_k = u_{\text{DFE},k} + \varphi_{\text{DFE},k}$ nun $u_{\text{DFE},k}$ von φ_k und somit von der aktuellen Genauigkeit der EC-Einstellung abhängig.

Die analytische Erfassung dieser Effekte unterbleibt aus Aufwandsgründen – es werden aber repräsentative Simulationsergebnisse zu den Auswirkungen der Verkopplung angegeben.

5.2 Theoretische Berechnung der Störleistungen

Die eigene Datenfolge a_k und die ferne Datenfolge b_k können als statistisch unabhängig vorausgesetzt werden. Damit sind auch die Signale y_k und x_k statistisch unabhängig. Weiterhin ist das Rauschen n_k hiervon statistisch unabhängig.

Ferner wird vorausgesetzt, daß y_k und u_k die Eigenschaft QT0 exakt (oder zumindest in guter Näherung) erfüllen, so daß $\delta_{\text{AD},k}$ gemäß Satz 4.7 statistisch unabhängig von y_k, x_k, n_k ist und gleichmäßig verteilt ist.

Als Folgerung ist nun y_k mit $u_k = x_k + n_k + \delta_{AD,k}$ unkorreliert (y_k ist statistisch unabhängig von den 3 Komponenten in u_k , aber dennoch von u_k selbst statistisch abhängig, wie noch gezeigt wird). Die Unkorreliertheit von y_k und u_k führt zu der sinnvollen Annahme, daß auch a_k und u_k unkorreliert sind – dies ist eine Abschwächung der Voraussetzung (2.1-2).

In Kapitel 2 war die statistische Unabhängigkeit von a_k und u_k gemäß (2.1-2) eine grundlegende Voraussetzung. Exakt ist dies aufgrund des A/D-Wandlers nun nicht mehr erfüllt, wie gezeigt werden kann : Dazu wird zunächst $n_k = 0$ vorausgesetzt. Dies ist der ungünstigste Fall, denn mit zusätzlichen Signalen werden die Amplitudenverteilungen glatter und die charakteristischen Funktionen schmäler, so daß die QT-Eigenschaften aus Abschnitt 4.3 besser erfüllt sind. Es seien y_k und x_k wertkontinuierlich. Dann ist natürlich auch $\delta_{AD,k} = \Delta_{AD}(y_k + x_k)$ wertkontinuierlich. Wegen der statistischen Unabhängigkeit von x_k und $\delta_{AD,k}$ ist $u_k = x_k + \delta_{AD,k}$ ebenfalls wertkontinuierlich. Es gilt $Q_{AD}(y_k + x_k) = y_k + x_k + \delta_{AD,k} = y_k + u_k$. Wenn nun y_k und u_k statistisch unabhängig wären, so wäre die Summe zweier wertkontinuierlicher Signale wieder wertkontinuierlich, was sich hier aber offenkundig als falsch erweist. Also sind y_k und u_k statistisch abhängig. Nicht gerechtfertigt wäre somit die Annahme, daß a_k und u_k statistisch unabhängig sind.

Die exakte Erfüllung der Voraussetzung (2.1-2) kann also nicht allgemein garantiert werden. Dies ist leider ein Bruch in der ansonsten geschlossenen Theorie der wertdiskreten Adaptionsverfahren – allerdings werden die Simulationsergebnisse dennoch eine sehr gute Übereinstimmung mit der unter der Voraussetzung (2.1-2) abgeleiteten Theorie zeigen.

Offensichtlich ist (2.1-2) um so besser erfüllt, je feiner A/D-gewandelt wird. Allerdings sollte die Wortlänge des A/D-Wandlers so kurz wie möglich sein, da dies für eine einfache Realisierung von zentraler Bedeutung ist.

Zusammenfassung Für die weiteren Rechnungen wird vorausgesetzt, daß die nachfolgend aufgeführten 5 Komponenten des Entscheiderfehlers statistisch unabhängig sind mit folgenden Verteilungen (die Erwartungswerte sind jeweils Null) :

$$\varphi_k, \varphi_{DFE,k}, n_k \quad \text{normalverteilt} \quad (5.2-1a)$$

$$\delta_{AD,k} \quad \text{gleichmäßig verteilt} \quad (5.2-1b)$$

$$x_{Vor,k} \quad \text{diskret verteilt, direkt aus der Impulsantwort berechenbar} \quad (5.2-1c)$$

Die Normalverteilung der Restsignale φ_k und $\varphi_{DFE,k}$ kann aufgrund der Ergebnisse aus Kapitel 3 angenommen werden.

Mit der Quantisierungsschrittweite q_{AD} von $Q_{AD}(\cdot)$ gilt für die Varianz bzw. Leistung des Entscheiderfehlers :

$$D^2\{e_{opt,k}\} = K^2 \left(D^2\{x_{Vor,k}\} + D^2\{n_k\} + \frac{q_{AD}^2}{12} \right) \quad (5.2-2)$$

$$D^2\{e_k\} = D^2\{e_{opt,k}\} + K^2 D^2\{\varphi_k\} + D^2\{\varphi_{DFE,k}\} \quad (5.2-3)$$

Für die nicht-kompensierbaren Signale gilt :

$$D^2\{u_k\} = D^2\{x_k\} + D^2\{n_k\} + \frac{q_{AD}^2}{12} \quad (5.2-4a)$$

$$D^2\{u_k^*\} = \frac{1}{K^2} \left(D^2\{e_{opt,k}\} + D^2\{\varphi_{DFE,k}\} \right) \quad (5.2-4b)$$

$$D^2\{u_{DFE,k}\} = D^2\{e_{opt,k}\} + K^2 D^2\{\varphi_k\} \quad (5.2-4c)$$

Die Leistungsverhältnisse der Restsignale zu den nicht-kompensierbaren Signalen werden notiert als

$$R_k^2 = \frac{D^2\{\varphi_k\}}{D^2\{u_k\}} \quad R_k^{*2} = \frac{D^2\{\varphi_k\}}{D^2\{u_k^*\}} \quad R_{DFE,k}^2 = \frac{D^2\{\varphi_{DFE,k}\}}{D^2\{u_{DFE,k}\}} \quad (5.2-5)$$

und können beispielsweise gemäß Tabelle 2.3 berechnet werden.

5.3 Modelle für die Verteilung des Nutzsignals

In Bild 5.2 ist eine Impulsantwort dargestellt, die für Ortskabel typisch ist und in ähnlicher Form auch beispielsweise in [6.4] angegeben ist. Die Abtastphase ist markiert. Das Signal x_k entsteht durch Faltung dieser Impulsantwort mit der Datenfolge b_k . Als Hauptwert ist selbstverständlich der maximale Wert an der Stelle 2 anzusprechen, so daß nur ein sehr kleiner Vorschwinger verbleibt.

Die Amplitudenverteilung von x_k hängt sehr stark ab vom verwendeten Leitungscode für die b_k : Bei binär codierter Datenfolge entsteht eine der Normalverteilung sehr ähnliche Verteilung, während eine AMI-codierte Datenfolge eine bimodale, fast binäre Verteilung bewirkt.

Die Histogramme in Bild 5.2 wurden mit jeweils 99000 Takten erzeugt und entsprechen mit der angegebenen Achsenbeschriftung der auf Varianz 1 normierten Amplituden-Verteilungsdichtefunktion $f_{x_N}(\xi)$. Direkt ablesbar ist $f_{x_N}(0) = 0.38$ bzw. $= 0$. Aus der Approximation $f_{x_N}(\xi) = f_{x_N}(0) + \xi^2 f_{x_N}''(0)/2$ wird für den AMI-Code $f_{x_N}''(0) = 2.4$ gewonnen. Beim Binär-Code ergibt sich $f_{x_N}''(0) = -0.25, -0.44, -0.31$ für die Approximation bei $\xi = 2/7, 3/7, 4/7$. Wegen der Dominanz von $f_{x_N}(0)$ ist der genaue Wert hier jedoch unwichtig.

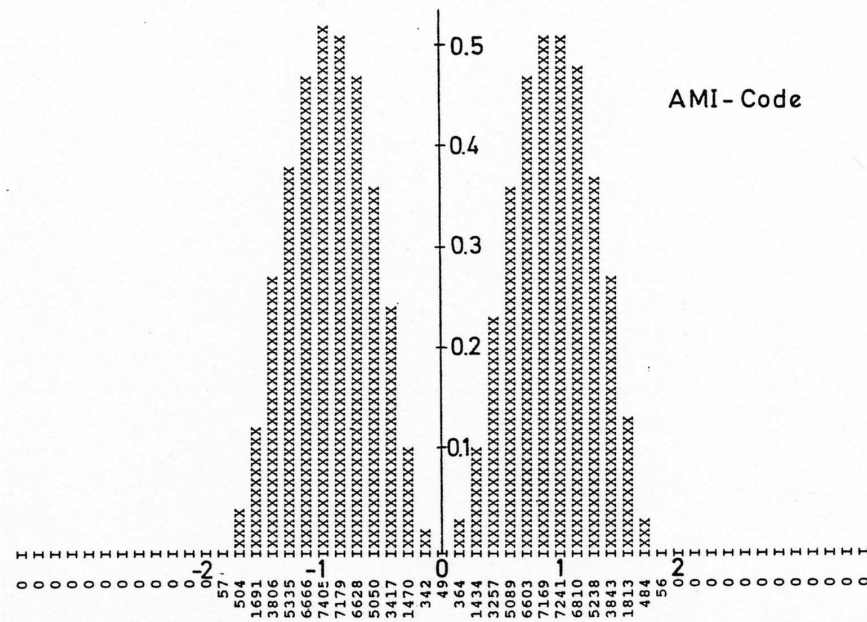
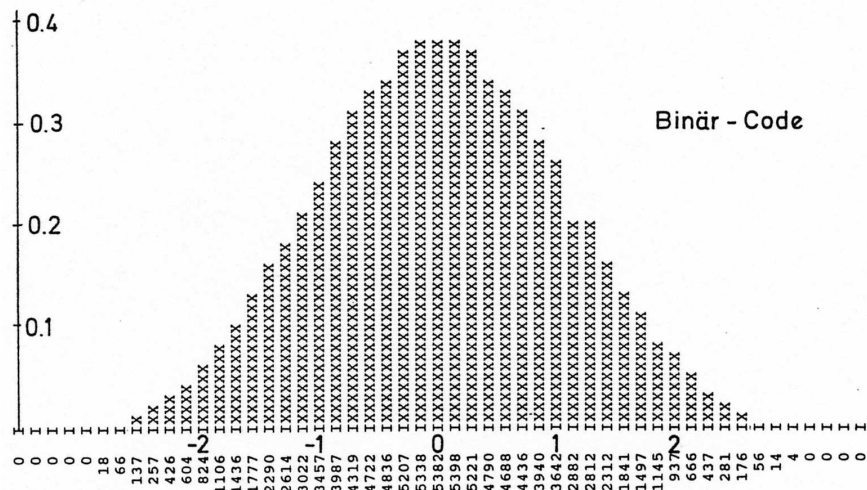
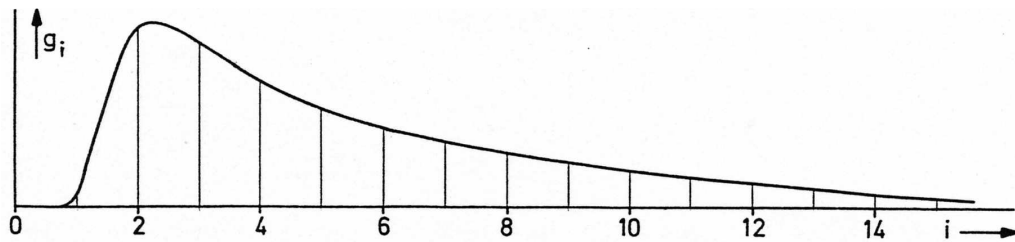


Bild 5.2: Impulsantwort mit stark vom Leitungscode abhängiger Amplituden-Verteilungsdichtefunktion

	Verteilung von u_k :	Normal	Unimodal	Bimodal
$q' = \infty$	$W^+ =$	0.40	0.38	0
	$E\{Q^2(u_k)\}/W^+ =$	2.50	2.63	
$q' = \sigma_u$	$W^+ =$	0.99	1.01	1.02
	$E\{Q^2(u_k)\} =$	4.20	4.40	4.55
	$E\{Q^2(u_k)\}/W^+ =$	4.24	4.36	4.46
$W^* = q/\sigma_u \cdot W^+, \quad W^+ = \sum_n f_{u_N}(s_n/\sigma_u)$ $Q(\cdot)$ ist definiert durch $s_n = nq', q = 2$				

Tabelle 5.1: Wichtige Parameter ausgewählter Verteilungen für die S-Adaption ($q' = \infty$) und die Q-Adaption (mit $q' = \sigma_u$)

Die Signale x_k und u_k sind einander um so ähnlicher, je kleiner das Rauschen n_k und je feiner die A/D-Wandlung ist. Von x_k und u_k werden deshalb nachfolgend zwar noch die Unterschiede in den Varianzen berücksichtigt, aber nicht mehr die geringfügigen Unterschiede in der Form des Verteilungstyps : $f_{x_N}(\xi) = f_{u_N}(\xi)$.

Wenn nachfolgend von unimodaler bzw. bimodaler Verteilung die Rede ist, sind immer die beiden Verteilungen aus Bild 5.2 gemeint (die natürlich unabhängig vom Leitungscode der a_k gewählt werden können). Ansonsten wird als Verteilung für u_k immer eine exakte Normalverteilung unterstellt. Für die theoretischen Kurven aus Abschnitt 5.3.2 wird eine Grad 2 – Approximation nur für die bimodale Verteilung bei S-Adaption verwendet. Ansonsten brauchen zur Berechnung von Restfehler und Konvergenzgeschwindigkeit gemäß der Formeln (2.3-41) nur diejenigen Größen bekannt zu sein, die in Tabelle 5.1 zusammengestellt sind.

Die Normal- und die Unimodal-Verteilung unterscheiden sich nicht wesentlich. Für die Q-Adaption ist sogar zu erwarten, daß alle 3 Verteilungen zu einem etwa gleichen Adaptionsverhalten führen. Wegen $q = 2$ sind die S- und Q-Adaption direkt miteinander vergleichbar.

Die Impulsantwort des Echsignals hat eine ähnliche Form wie die des Nutzsignals. Allerdings ist das und auch die Amplitudenverteilung des Echsignals ohne weitere Bedeutung.

5.4 Simulationsergebnisse

Abschnitt 5.4.1 beschreibt zunächst das verwendete Prinzip zur Simulation einer Einlaufkurve. Abschnitt 5.4.2 gibt einen Überblick zu allen Simulationsrechnungen, die

dann in den Abschnitten 5.4.3 (nur EC-Adaption) und 5.4.4 (gemeinsame EC-DFE-Adaption) detailliert dargestellt werden.

5.4.1 Allgemeine Bemerkungen zum Simulations-Prinzip einer Einlaufkurve

Für einen Simulationslauf werden 2 zufällige, statistisch unabhängige und dem Leitungscode entsprechende Folgen a_k und b_k ausgewählt. Aus den vorgegebenen Impulsantworten für den Echokanal und den Übertragungskanal des fernen Teilnehmers ergeben sich damit die Folgen y_k und x_k . Die Adaption des EC ergibt eine Vektorfolge $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{c}_{\text{opt}} - \mathbf{c}_k$ von Koeffizienten-Fehleinstellungen bzw. eine Folge von Restsignalen $\varphi_k = \mathbf{a}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k = y_k - \hat{y}_k$. Daraus kann eine Folge von Schätzungen $\hat{\sigma}_k^2$ für die Folge der Restsignal-Varianzen $\sigma_k^2 = D^2\{\varphi_k\} = E\{\varphi_k^2\}$ mit folgenden Methoden gewonnen werden :

- Mittelung quer zum Prozeß (Scharmittelwerte) :
Dazu müssen viele Simulationsläufe mit jeweils zufälligen Datenfolgen ausgeführt werden und für jedes k wird über die jeweils aktuell beobachteten Restsignal-Quadrate gemittelt. Praktisch scheidet diese Methode wegen des zu großen Aufwandes aus.
- Kurzzeitmittelung der φ_k^2 über jeweils M Takte :

$$\hat{\sigma}_{k,M}^2 := \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \varphi_{k-i}^2 \quad (5.4-1)$$

Zwar kann im eingeschwungenen Zustand σ_∞^2 hiermit recht gut geschätzt werden, aber ansonsten muß M klein gewählt werden, um die zeitlichen Schwankungen in σ_k^2 zu erfassen. In Anhang A.7 wird gezeigt, daß $\hat{\sigma}_{k,M}^2$ mit einer Varianz behaftet ist, die erst bei $M > L^2$ kleiner wird als die Varianz der folgenden Schätzung :

- Direkte Schätzung aus der Koeffizienten-Fehleinstellung :

$$\hat{\sigma}_k^2 := \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\Phi}_{aa} \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad \left(= E\{\varphi_k^2 \mid \boldsymbol{\varepsilon}_k\} \right) \quad (5.4-2)$$

\mathbf{c}_{opt} ist bei der Simulation natürlich bekannt und somit auch $\boldsymbol{\varepsilon}_k$. Da $\boldsymbol{\Phi}_{aa}$ natürlich ebenfalls bekannt ist, kann $\hat{\sigma}_k^2$ problemlos berechnet werden.

Die rechte Gleichheit in (5.4-2) entspricht (2.1-14). Hieraus ergibt sich mit der allgemeinen Formel (A.2-3) für bedingte Erwartungswerte die Folgerung

$E\{\hat{\sigma}_k^2\} = E\{E\{\varphi_k^2 \mid \varepsilon_k\}\} = E\{\varphi_k^2\}$, d.h. $\hat{\sigma}_k^2$ ist eine erwartungstreue Schätzung :

$$E\{\hat{\sigma}_k^2\} = \sigma_k^2 \quad , \quad \frac{D\{\hat{\sigma}_k^2\}}{E\{\hat{\sigma}_k^2\}} = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (5.4-3)$$

Das rechte Resultat wird in Anhang A.7 hergeleitet. Danach hat die als Zufallsvariable anzusehende Varianzschätzung $\hat{\sigma}_k^2$ eine Streuung proportional zum Erwartungswert. Die Schätzung $\hat{\sigma}_k^2$ schwankt also um so weniger um ihren Erwartungswert σ_k^2 , je kleiner σ_k^2 wird. Weiterhin nimmt die Größe der Schwankung mit wachsender Länge des adaptiven Filters langsam ab.

Die Schätzung (5.4-2) ist natürlich deshalb viel besser als die Schätzung (5.4-1), weil die Werte a_k nur noch über die Koeffizienten-Einstellung eingehen und nicht mehr zusätzlich über die Werte des Restsignals.

Die Werte

$$\hat{R}_k^2 := \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\sigma_u^2} = \frac{\varepsilon_k^T \Phi_{aa} \varepsilon_k}{\sigma_u^2} \quad (5.4-4)$$

werden bei den nachfolgenden Bildern im Abstand von 200, 500 oder 2000 Takten ausgegeben. Die Folge der Werte \hat{R}_k kann natürlich nicht zu einer glatten Kurve verbunden werden, wie das bei den theoretischen Werten $R_k = \sigma_k/\sigma_u$ der Fall ist.

Für eine gute Bestätigung der Theorie sollte \hat{R}_k im linearen Mittel mit R_k übereinstimmen. Die mittlere quadratische Abweichung beträgt nach (5.4-3) für $L = 32$ ungefähr 1 dB, was durch die Simulationsrechnungen in etwa bestätigt wird. Aufgrund des logarithmischen Maßstabes für \hat{R}_k in den folgenden Bildern müssen die Abweichungen gegenüber R_k nach unten größer als nach oben ausfallen. Insgesamt erlaubt aber die Größe der mittleren quadratischen Abweichung keine Aussagen oder Interpretationen, die von wesentlicher Bedeutung wären.

5.4.2 Allgemeine Bemerkungen zu den Simulationsrechnungen

In Abschnitt 5.4.3 (Bild 5.3 bis Bild 5.12) werden nur Simulationsergebnisse zur EC-Adaption mit dem Signal u_k nach der Kompensationsstelle ohne Berücksichtigung des DFE angegeben. In Abschnitt 5.4.4 (Bild 5.13 bis Bild 5.15) wird schließlich wieder der komplette Empfänger gemäß Bild 5.1 simuliert, wobei EC und DFE gleichzeitig adaptiert werden.

Die Koeffizienten der variablen Filter werden zu Beginn der Adaption auf Null gesetzt. Wegen $D\{u_k\} \approx D\{x_k\}$ gilt $R_k = \sigma_k/\sigma_u \approx \sigma_k/D\{x_k\}$. R_0 entspricht dem Verhältnis

Bild	Konfig.	Adap.	Verteilung u_k	Verstellgröße	Leitungscode
5.3	EC-Theorie	K,S	Normal	$\alpha, \alpha_u = 2^{-14}, 2^{-16}$	Binär
5.4	EC-Sim.	K,S	Normal	$\alpha, \alpha_u = 2^{-14}$	Binär
5.5	EC-Sim.	S	Normal	$\alpha_u = 2^{-11}, 2^{-13}$	Binär
5.6	EC-Sim.	K	irrelevant	$\alpha\sigma_a^2 = 2^{-10}$	Binär, MMS43, AMI
5.7	EC-Sim.	S	Normal	$\alpha_u\sigma_a^2 = 2^{-10}$	Binär, MMS43, AMI
5.8	EC-Sim.	S	Normal	α_u variabel	AMI
5.10	EC-Sim.	S	Uni-, Bimodal	$\alpha_u = 2^{-12}$	Binär
5.11	EC-Sim.	S,Q	Unimodal	$\alpha_u = 2^{-12}$	Binär
5.12	EC-Sim.	S,Q	Bimodal	$\alpha_u = 2^{-12}$	Binär
5.13	EC-DFE-Sim.	K	irrelevant	$\alpha = 2^{-15}, \alpha_{\text{DFE}} = 2^{-5}$	Binär
5.14	EC-DFE-Sim.	S	Unimodal	$\alpha = 2^{-18}, \alpha_{\text{DFE}} = 2^{-10}$	Binär
5.15	EC*-DFE-Sim.	S	Unimodal	$\alpha = 2^{-15}, \alpha_{\text{DFE}} = 2^{-10}$	Binär
$L = 32; L_{\text{DFE}} = 16; \sigma_a^2 = 1$ wenn nicht anders angegeben					

Tabelle 5.2: Verzeichnis aller Bilder mit theoretischen oder simulierten Einlaufkurven

von Echosignal zu Nutzsignal und R_∞ gibt dann den Abstand vom Restecho nach der EC-Kompensationsstelle zum Nutzsignal an.

Eine Übersicht zu allen simulierten Einlaufkurven zeigt Tabelle 5.2.

Die Verstellgrößen von EC und DFE werden mit α und α_{DFE} bezeichnet. Für die normierte EC-Verstellgröße wird $\alpha_u = \alpha/D\{u_k\}$ geschrieben. Diese Größen werden in Kapitel 6 auf die Wortlängen der Koeffizienten umgerechnet.

Generell ist $L = 32$ bzw. $L_{\text{DFE}} = 16$ die Anzahl der Koeffizienten beim EC bzw. DFE. Bei binärem Leitungscode gilt immer $\sigma_a^2 = 1$ – nur bei korrelierten Leitungs-codes werden die Ergebnisse in Abhängigkeit von der Größe $\alpha\sigma_a^2$ bzw. $\alpha_u\sigma_a^2$ angegeben.

Generell werden Simulationsergebnisse mit ausgezogenen (\hat{R}_k) und theoretisch berechnete Werte mit gestrichelten (R_k) Kurven dargestellt.

5.4.3 EC-Adaption

Die Simulationsergebnisse zur K- und S-Adaption bei unkorrelierten bzw. korrelierten Leitungs-codes werden in Abschnitt 5.4.3.1 bzw. 5.4.3.2 dargestellt. In Abschnitt 5.4.3.3 wird die S- und Q-Adaption behandelt, wobei wieder unkorrelierte Leitungs-codes vorausgesetzt werden.

Das Rauschen n_k und der A/D-Quantisierungsfehler $\delta_{AD,k}$ werden hier als Null angenommen, um zusätzliche Beeinflussungen der EC-Adaption zu vermeiden.

5.4.3.1 K- und S-Adaption bei unkorrelierten Leitungscodes

Zunächst werden in Bild 5.3 ausschließlich theoretische Einlaufkurven gezeigt. Dabei ist $R_\infty = -30 \dots -35$ dB ein typischer und realistischer Wert (Beispiel ISDN-U-Schnittstelle). Der Vergleich unterschiedlicher Verstellgrößen zeigt, daß kleine Verstellgrößen zu kleinen Restfehlern bei sehr langsamer Konvergenzgeschwindigkeit führen. Hohe Konvergenzgeschwindigkeit ist nur um den Preis eines großen Restfehlers erreichbar. Die K- und S-Adaption darf natürlich nicht bezüglich der Verstellgröße α verglichen werden, sondern sinnvollerweise bezüglich des erreichbaren R_∞ . Für einen gleich großen Restfehler muß α bei der K-Adaption etwa dem Wert $\alpha_u = \alpha/\sigma_u$ bei der S-Adaption entsprechen. Bei gleichem R_∞ wird bei der S-Adaption $R_k \approx R_\infty$ nach etwa 30 % längerer Adaptionszeit erreicht als bei der K-Adaption.

Zur Vermeidung sehr langer Adaptionszeiten wird die Verstellgröße in den folgenden Bildern unrealistisch groß gewählt, so daß nur etwa $R_\infty \approx -20$ dB gilt. Zur Überprüfung der Theorie ist das völlig ausreichend, da die Theorie um so genauer stimmt, je kleiner R_∞ wird, wie in Kapitel 2 mehrfach ausgeführt wurde.

In Bild 5.4 erfolgt ein erster Vergleich zwischen der Theorie und der Simulation. Bei der K-Adaption ist die hervorragende Übereinstimmung offensichtlich. Dagegen konvergiert die S-Adaption anfangs (d.h. bei $R_k > 0$ dB) viel langsamer, als es die theoretische Kurve voraussagt. Die Ursache dafür ist einfach einsehbar : Die Verteilungsdichtefunktion von u_k wird durch eine konstante Funktion approximiert, nämlich durch ihren Wert an der Stelle 0. Bei $R_k > 1$ (d.h. $D\{\varphi_k\} > D\{u_k\}$) wird diese Approximation noch in Bereichen wirksam, wo die Verteilungsdichtefunktion schon wieder stark abgeklungen ist. Deshalb erscheinen die Funktionswerte $W(\sigma)$ fälschlicherweise zu groß (siehe auch Bild 2.3).

Die Anfangsadaptation bis $R_k \approx 0$ dB ist freilich kein ernsthaftes Problem, wie noch bei Bild 5.8 erklärt wird. Für den entscheidenden Bereich von 0 dB bis -28 dB ist die S-Adaption in Bild 5.4 (genau wie mit Bild 5.3 vorausgesagt) tatsächlich nur etwa 30 % langsamer als die K-Adaption. Durch geeignete Verschiebung der theoretischen Einlaufkurve ergibt sich auch für die S-Adaption eine sehr gute Übereinstimmung mit der Simulation.

In Bild 5.5 wird nochmals der Einfluß unterschiedlicher Verstellgrößen demonstriert. Bei einem Start der Adaption mit $R_0 = -3$ dB stimmt die theoretische Einlaufkurve sehr genau, während bei $R_0 = +3$ dB die Anfangsadaptation etwas zu schnell vorausgesagt wird und somit wieder eine Verschiebung der theoretischen Kurve notwendig ist.

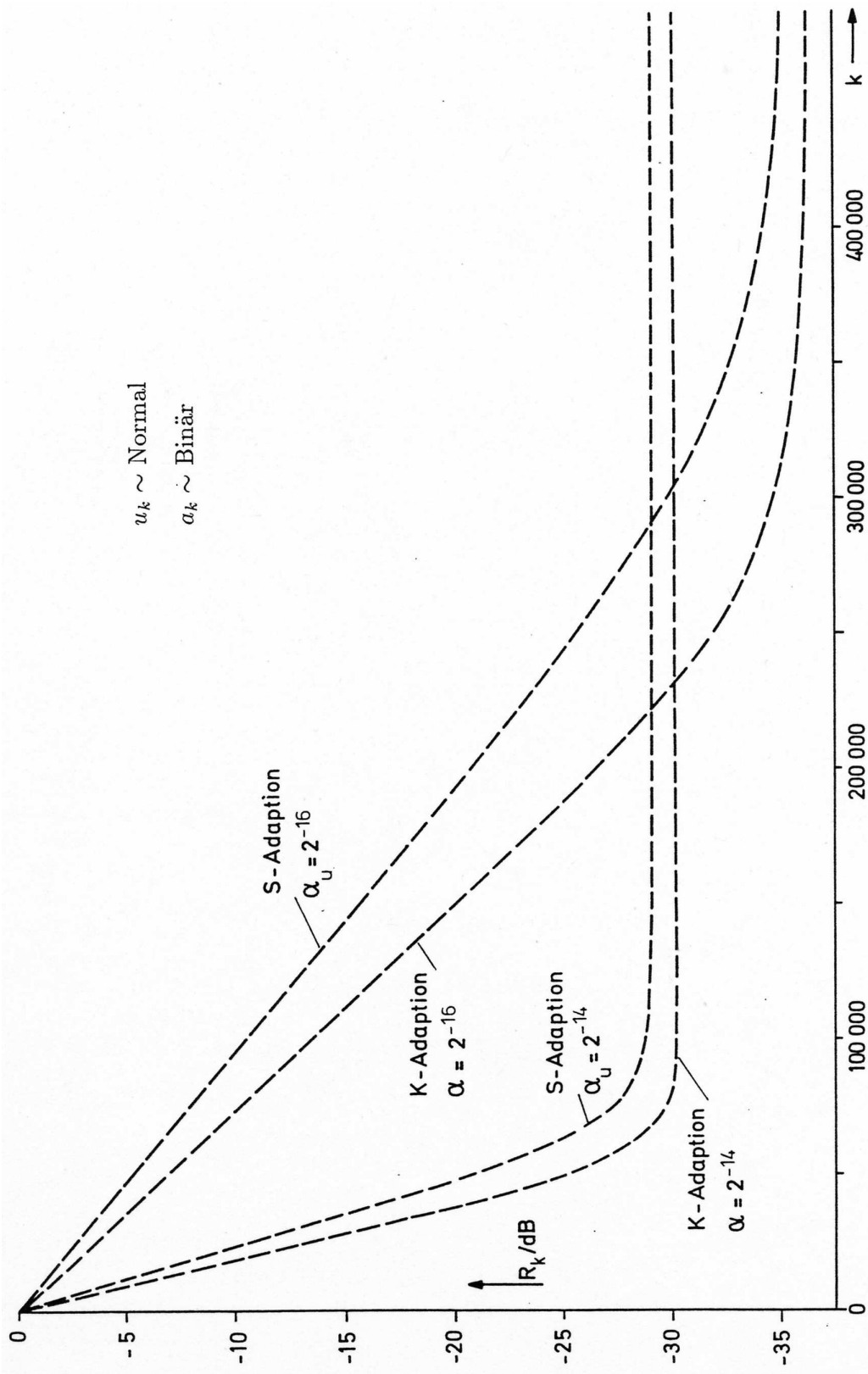


Bild 5.3: Theoretische EC-Einlaufkurven für K- und S-Adaption

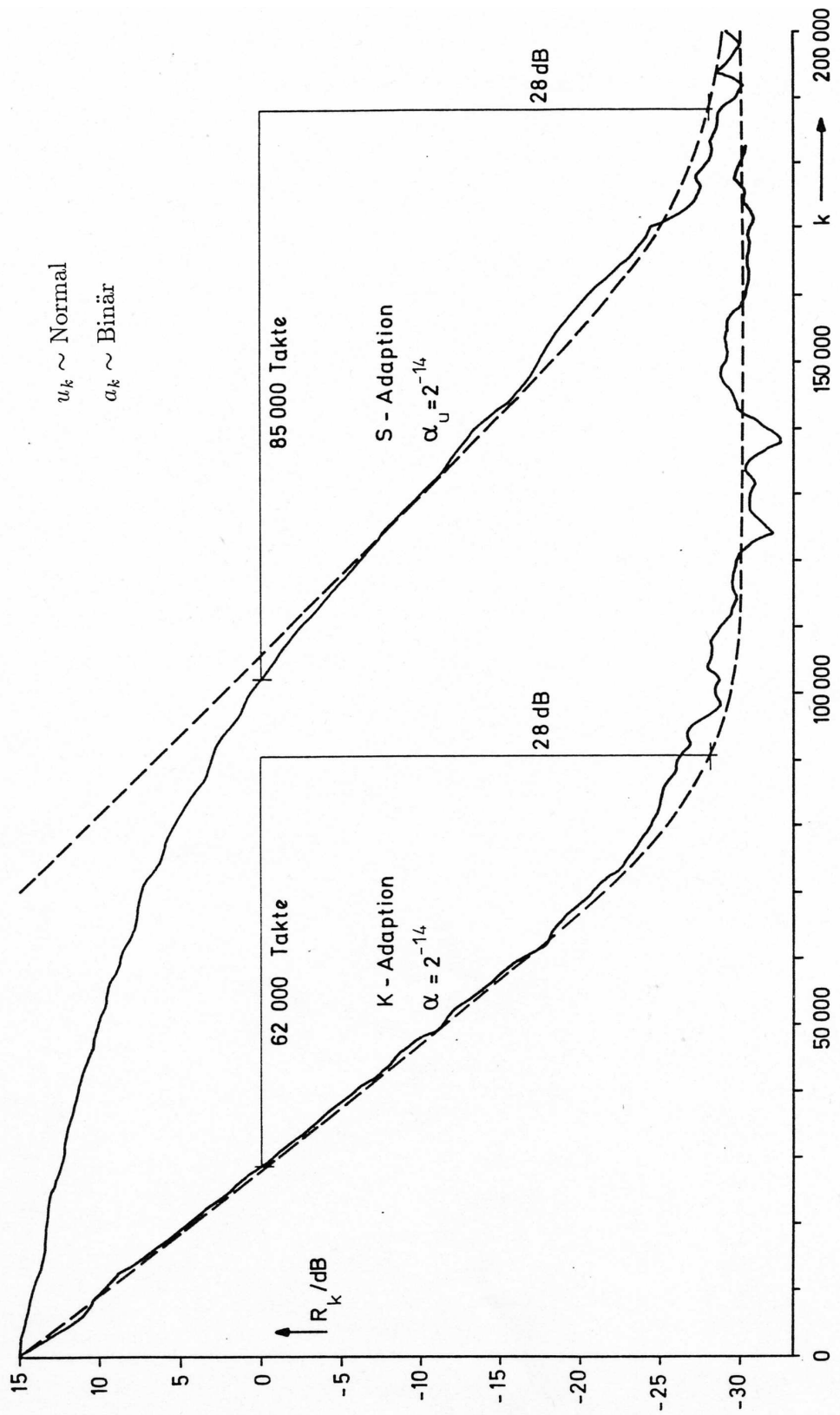


Bild 5.4: Simulierte EC-Einlaufkurven für K- und S-Adaption

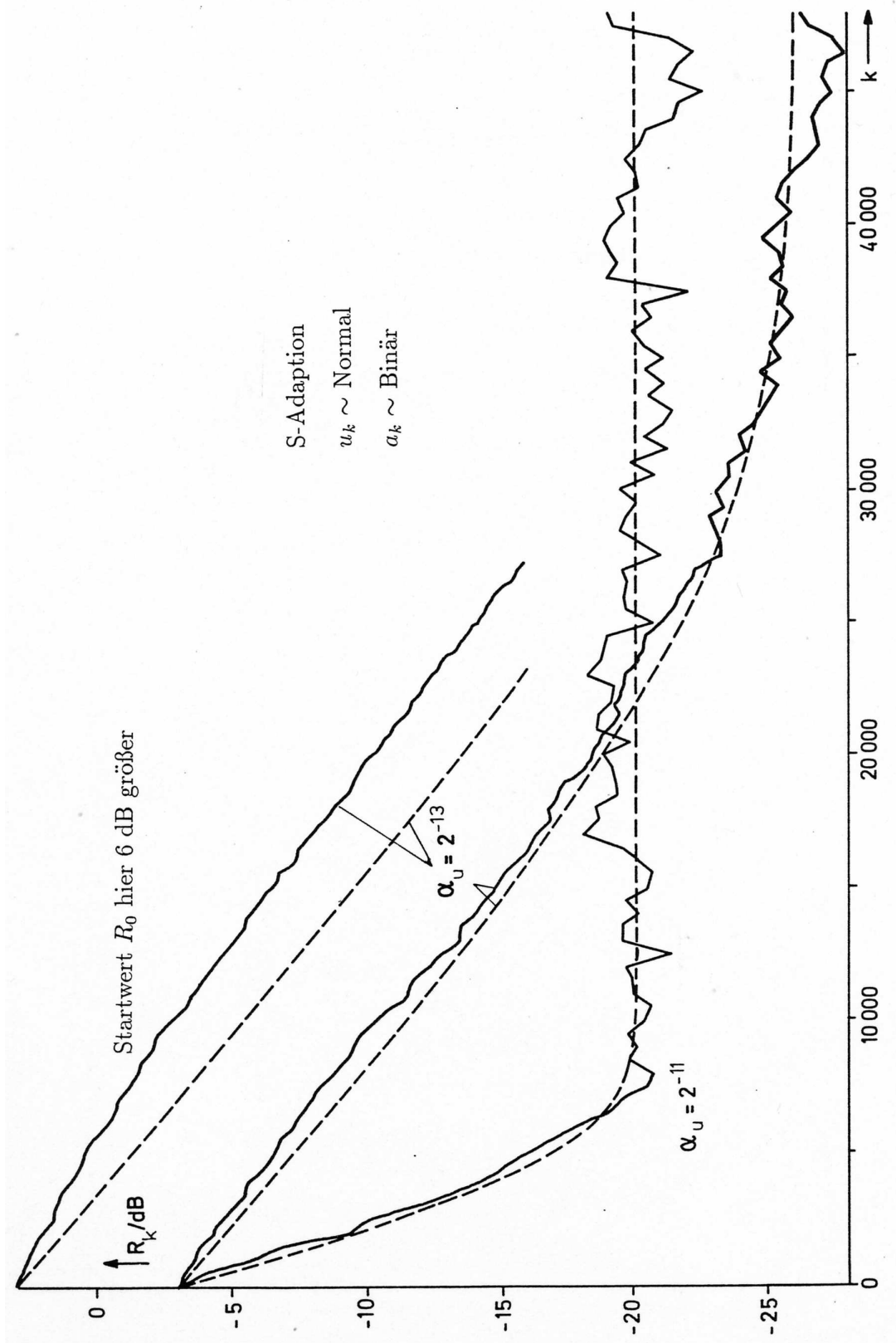


Bild 5.5: Simulierte EC-Einlaufkurven für verschiedene Verstellgrößen und Startwerte

5.4.3.2 K- und S-Adaption bei korrelierten Leitungscodes

In Bild 5.6 wird der Einfluß verschiedener Leitungscodes auf die K-Adaption gezeigt. Starke Korrelationen wie beim AMI-Code bewirken eine extrem verringerte Konvergenzgeschwindigkeit, obwohl schließlich das gleiche R_∞ wie beim Binär-Code erreicht wird. 1 dB Abstand zum Restfehler (= -18.1 dB) werden beim Binär-Code nach 4200, beim MMS43-Code nach 12000 und beim AMI-Code nach 80000 Takten erreicht.

Die gleiche hervorragende Übereinstimmung zwischen Theorie und Simulation zeigt Bild 5.7 für die S-Adaption, wo die Verhältnisse im Prinzip wie bei der K-Adaption sind. 1 dB Abstand zum Restfehler (= -17.1 dB) werden beim Binär-Code nach 6500, beim MMS43-Code nach 15000 und beim AMI-Code nach 95000 Takten erreicht.

Insbesondere beim AMI-Code ergibt sich die unbedingte Notwendigkeit einer Konvergenzbeschleunigung. Eine einfache und zugleich sehr wirksame Methode ist die Umschaltung der Verstellgrößen, wie es in Bild 5.8 demonstriert wird. Eine Möglichkeit dazu ist die Umschaltung nach festen vorgegebenen Zeiten. Eine noch bessere Verfahren ergibt sich bei einer adaptiven Umschaltung der Verstellgrößen, wobei das Umschalt-Kriterium auf der Genauigkeit der Koeffizienten-Einstellung beruht. Im Einzelfall kann damit die Konvergenzzeit um mehr als den Faktor 100 verkürzt werden. Ein solches Verfahren wird in [6.1] beschrieben und kann mit den in dieser Arbeit entwickelten Methoden auch theoretisch genau analysiert werden.

Nebenbemerkung zu Bild 5.8 : Ab Takt Nummer 21000 können 2 theoretische Einlaufkurven bei gleicher Verstellgröße miteinander verglichen werden, die sich zunächst nur durch verschiedene Anfangswerte R_{21000} unterscheiden. Es fällt jedoch auf, daß bis zur Takt Nummer 23000 die untere Kurve erheblich schneller als die obere Kurve konvergiert. Bei einem Leitungscod ohne Korrelationen würden beide Kurven in diesem Bereich parallel verlaufen. Der unterschiedliche Verlauf bei korrelierten Codes wird dadurch verursacht, daß die Gewichte w_i in (2.5-30) explizit von der Anfangs-Koeffizienten-Einstellung abhängen und nicht nur vom Anfangs-Restfehler. Bis zur Takt Nummer 21000 ist die untere Kurve im Gegensatz zur oberen Kurve schon nahe bei ihrem Endwert, so daß die Koeffizienten-Fehleinstellung nach Satz 2.4 weitgehend unkorreliert ist und somit die w_i klein ausfallen (das gilt entsprechend auch für die S-Adaption).

Für die Verhältnisse aus Bild 5.7 beim AMI-Code zeigt nun Bild 5.9 den im Verlauf der Adaption wechselnden Einfluß verschiedener Eigenwerte der Autokorrelationsmatrix. Für verschiedene Zeitpunkte k sind die Werte $w_0 t_0^k, \dots, w_{31} t_{31}^k$ sowie am linken Bildrand zusätzlich die Summe

$$\sum_{i=0}^{31} w_i t_i^k = \sigma_k^2 - \sigma_\infty^2$$

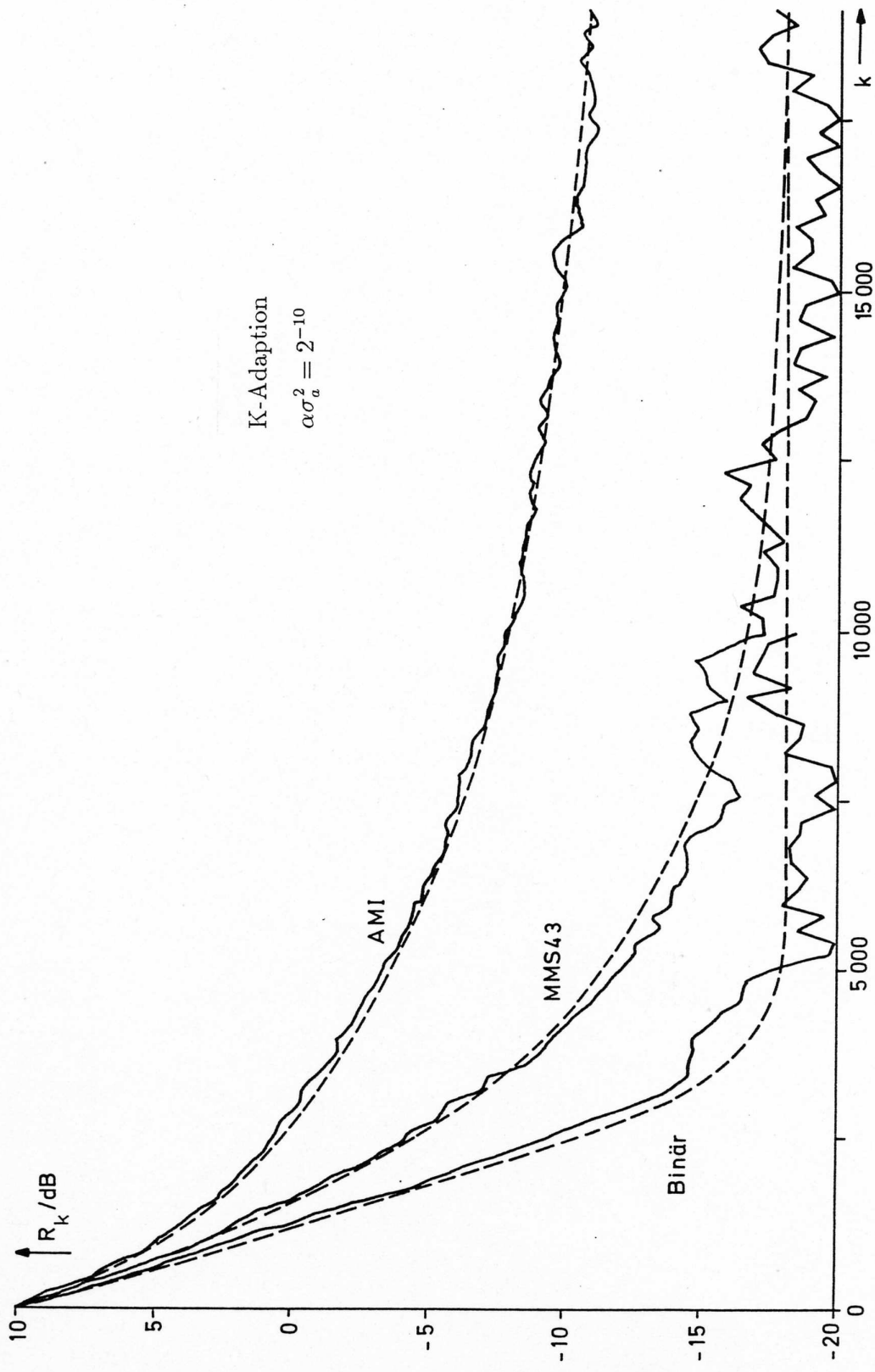


Bild 5.6: Simulierte EC-Einlaufkurven für verschiedene Leitungscodes bei K-Adaption

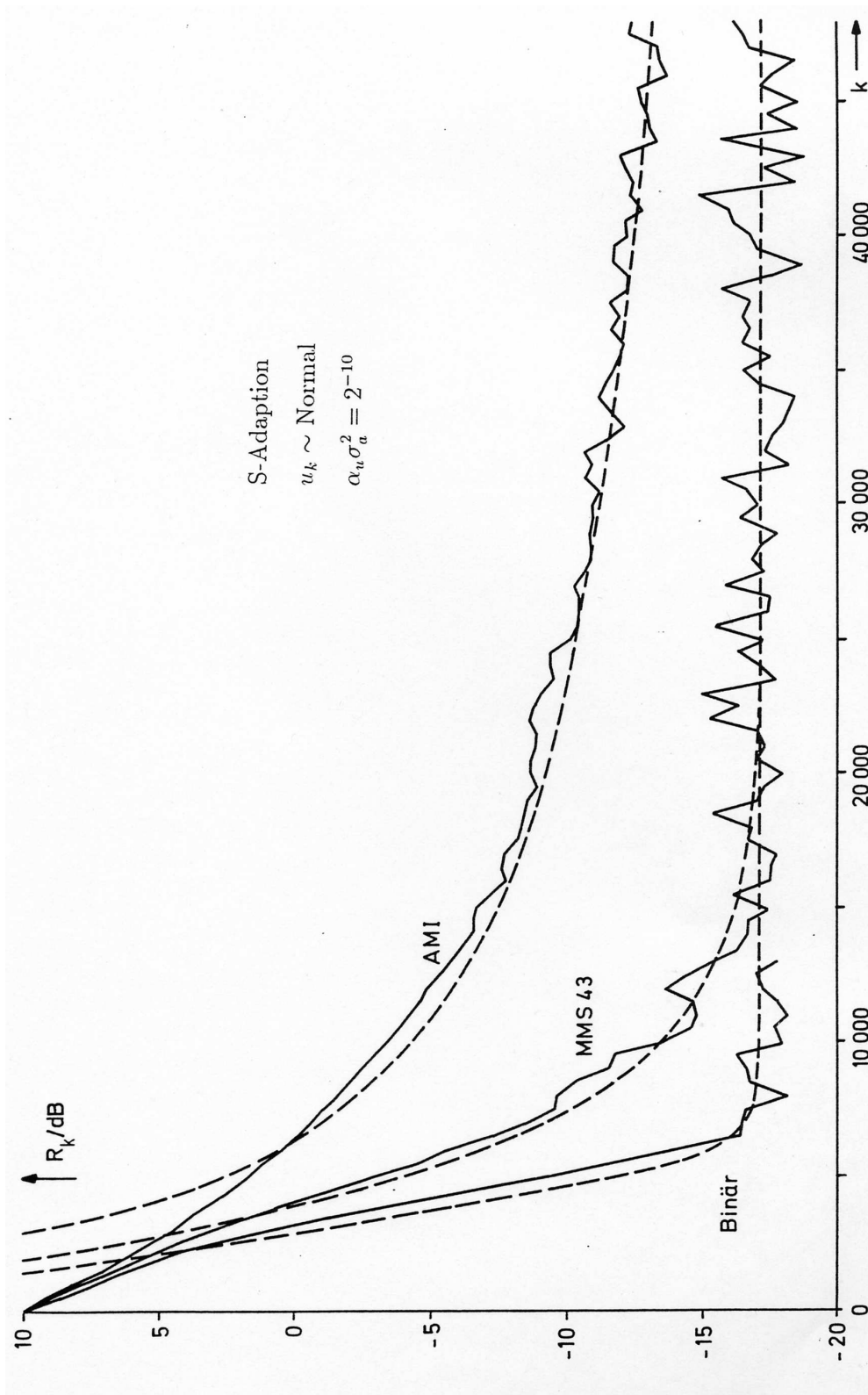


Bild 5.7: Simulierte EC-Einlaufkurven für verschiedene Leitungscodes bei S-Adaption

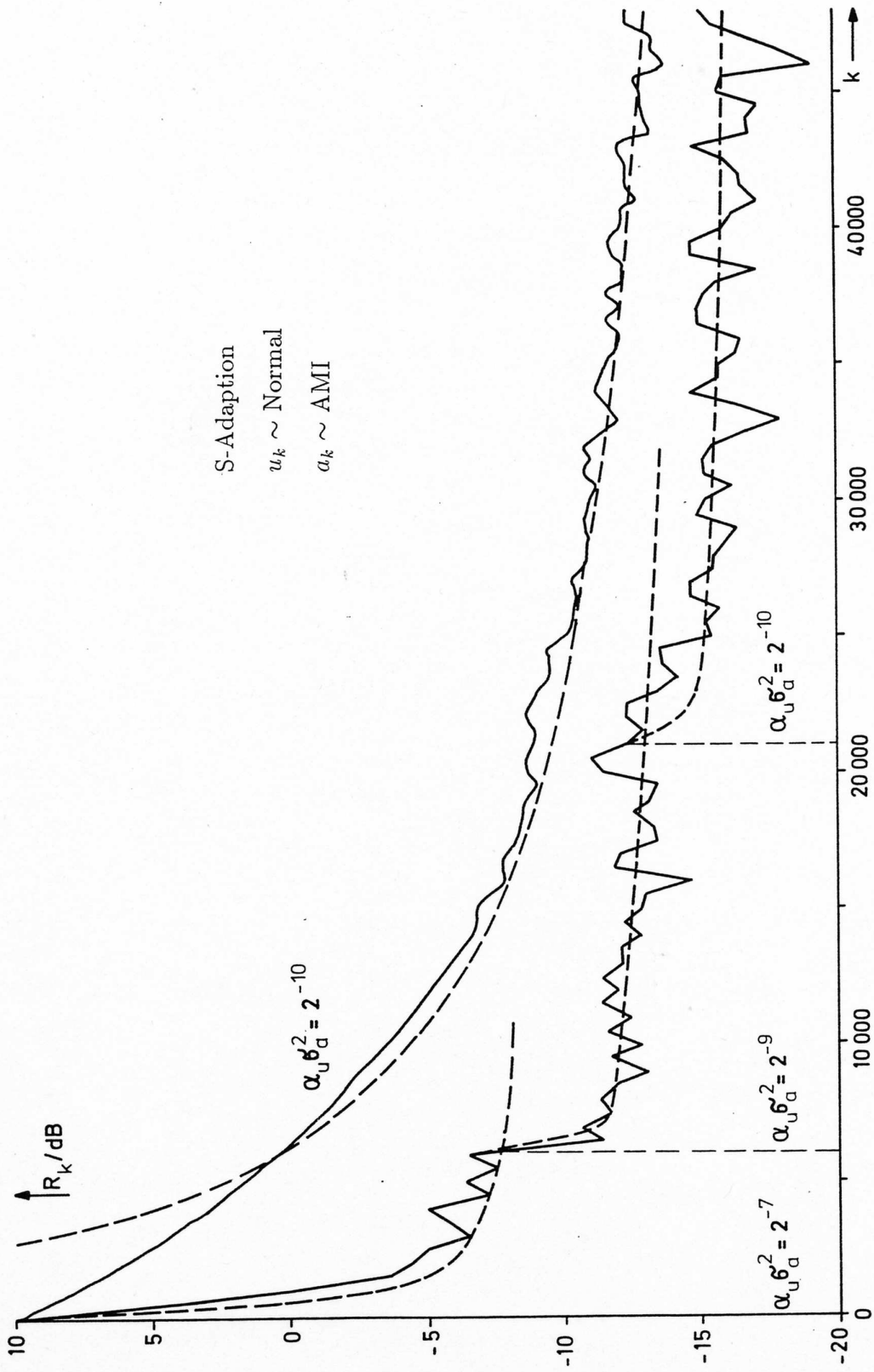


Bild 5.8: Simulierte EC-Einlaufkurven mit Konvergenzbeschleunigung durch variable Verstellgröße

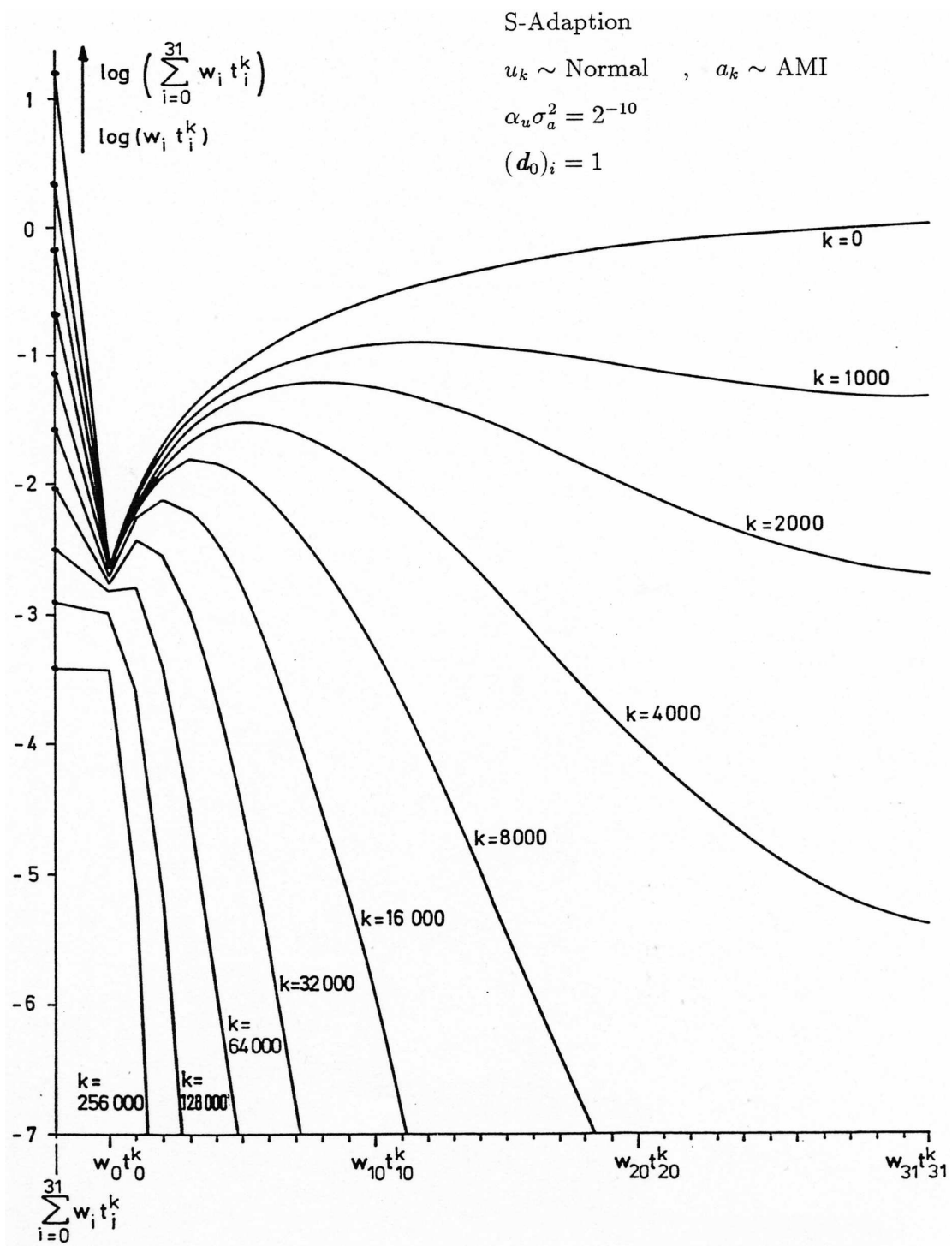


Bild 5.9: Darstellung des im Verlauf der Adaption stark wechselnden Einflusses einzelner Eigenwerte auf die Konvergenzgeschwindigkeit

angegeben (siehe (2.5-30), (2.5-31) und die dort folgenden Bemerkungen). Dabei wurde $(\mathbf{d}_0)_i = 1$ gesetzt. Der maximale Term in der Summe tritt auf

für $k = 0$ bei $i = 31$ (größter Eigenwert),
 für $k = 1000$ bei $i = 13$,
 für $k = 2000$ bei $i = 9, \dots$,
 für $k = 64000$ bei $i = 1$,
 für $k > 128000$ bei $i = 0$ (kleinster Eigenwert)

Für großes k gilt also $w_0 t_0^k \approx \sigma_k^2 - \sigma_\infty^2$. Die Zahlenwerte im vorliegenden Fall sind $w_0 = 0.002\,264$, $t_0 = 0.999\,992\,944$ und $R_\infty = -17.1$ dB.

Allein mit der Kenntnis der Eigenwerte der Autokorrelationsmatrix des Leitungscodes ist nur eine mäßig genaue Bestimmung der Einlaufkurve möglich, wie Bild 5.8 gezeigt hat. Präzise Ergebnisse erhält man nur, wenn für \mathbf{d}_0 die exakten Werte eingesetzt werden, wozu eine genaue Kenntnis der Koeffizienten-Fehleinstellung bei $k = 0$ sowie auch der Eigenvektoren der Autokorrelationsmatrix erforderlich ist. Mit dieser exakten Methode wurden die theoretischen Einlaufkurven der Bilder 5.6 bis 5.8 erzeugt.

5.4.3.3 S- und Q-Adaption bei unkorrelierten Leitungscodes

In Bild 5.10 ist das Verhalten der S-Adaption für die beiden extrem unterschiedlichen u_k -Verteilungen aus Bild 5.2 dargestellt. Bei der unimodalen Verteilung ergeben sich ähnliche Verhältnisse wie bei der Normalverteilung. Bei der bimodalen Verteilung ist die Konvergenzgeschwindigkeit jedoch wesentlich langsamer und der erreichbare Restfehler ist 9 dB schlechter. Für gleiches R_∞ muß die Verstellgröße bei der bimodalen Verteilung um den Faktor 2^{-6} (Einerung aus Bild 2.6 : 1 Bit gibt 1.5 dB Gewinn) kleiner sein als bei der unimodalen Verteilung, wodurch sich der Unterschied in der Konvergenzgeschwindigkeit extrem vergrößert.

Die beiden folgenden Bilder für die unimodale bzw. bimodale Verteilung verdeutlichen, welche Änderungen sich beim Übergang von der S-Adaption zur Q-Adaption mit $q' = \sigma_u$ (= Sprungstellen-Abstand) ergeben. Praktisch müssen dazu 5 (unimodale Verteilung) bzw. 3 (bimodale Verteilung) Sprungstellen in der Quantisierungskennlinie $Q(\cdot)$ realisiert werden. Wegen $q = 2$ (= Quantisierungsschrittweite) bedeuten gleiche Verstellgrößen auch gleichen Werteabstand bei den Koeffizienten für S- und Q-Adaption.

In Bild 5.11 wird zunächst die unimodale Verteilung betrachtet. Die Q-Adaption führt hier zwar gegenüber der S-Adaption zu einer höheren Konvergenzgeschwindigkeit, aber auch zu einem größeren Restfehler. Das entspricht genau der Aussage aus Bild 2.4.

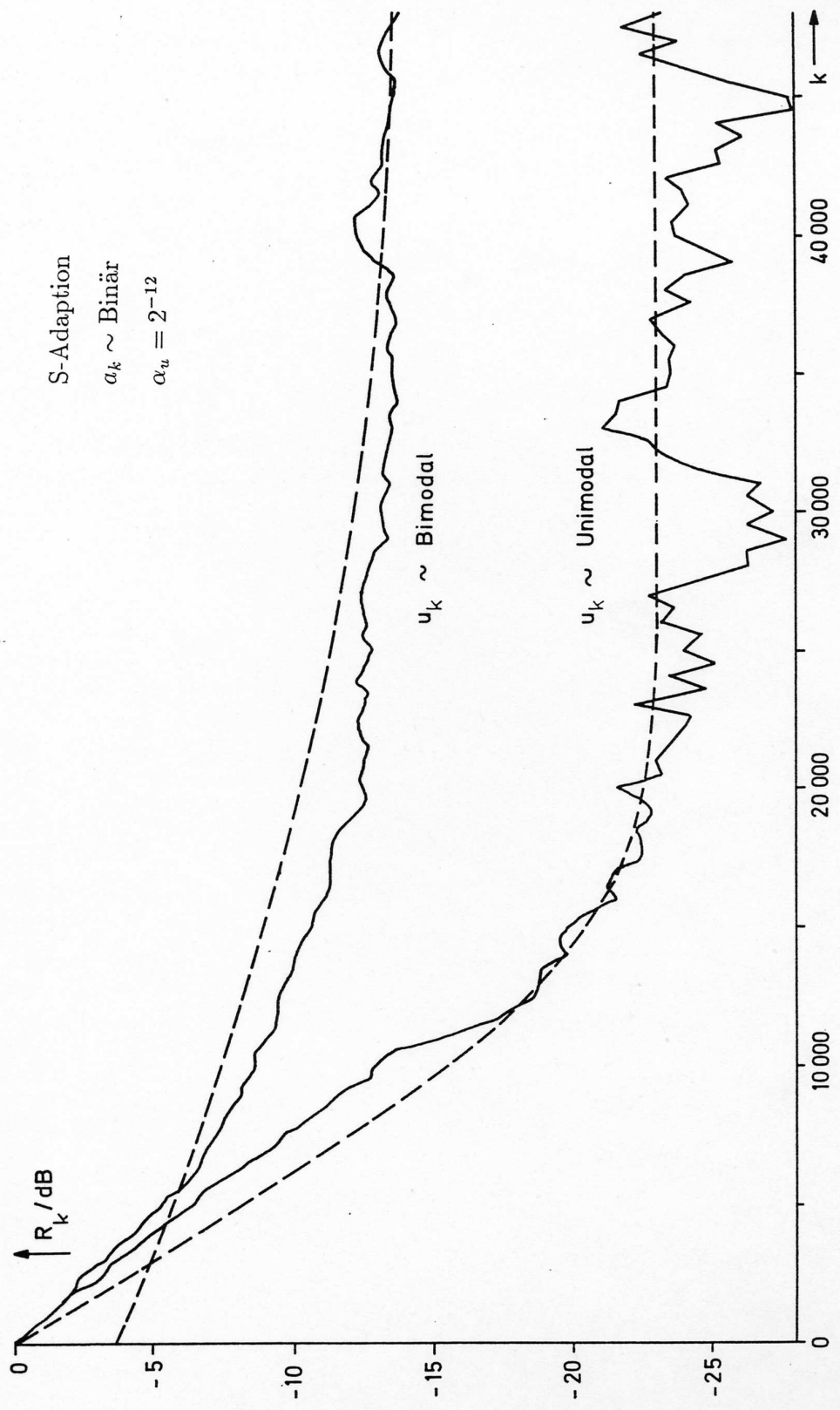


Bild 5.10: Simulierte EC-Einlaufkurven für verschiedene Verteilungen von u_k

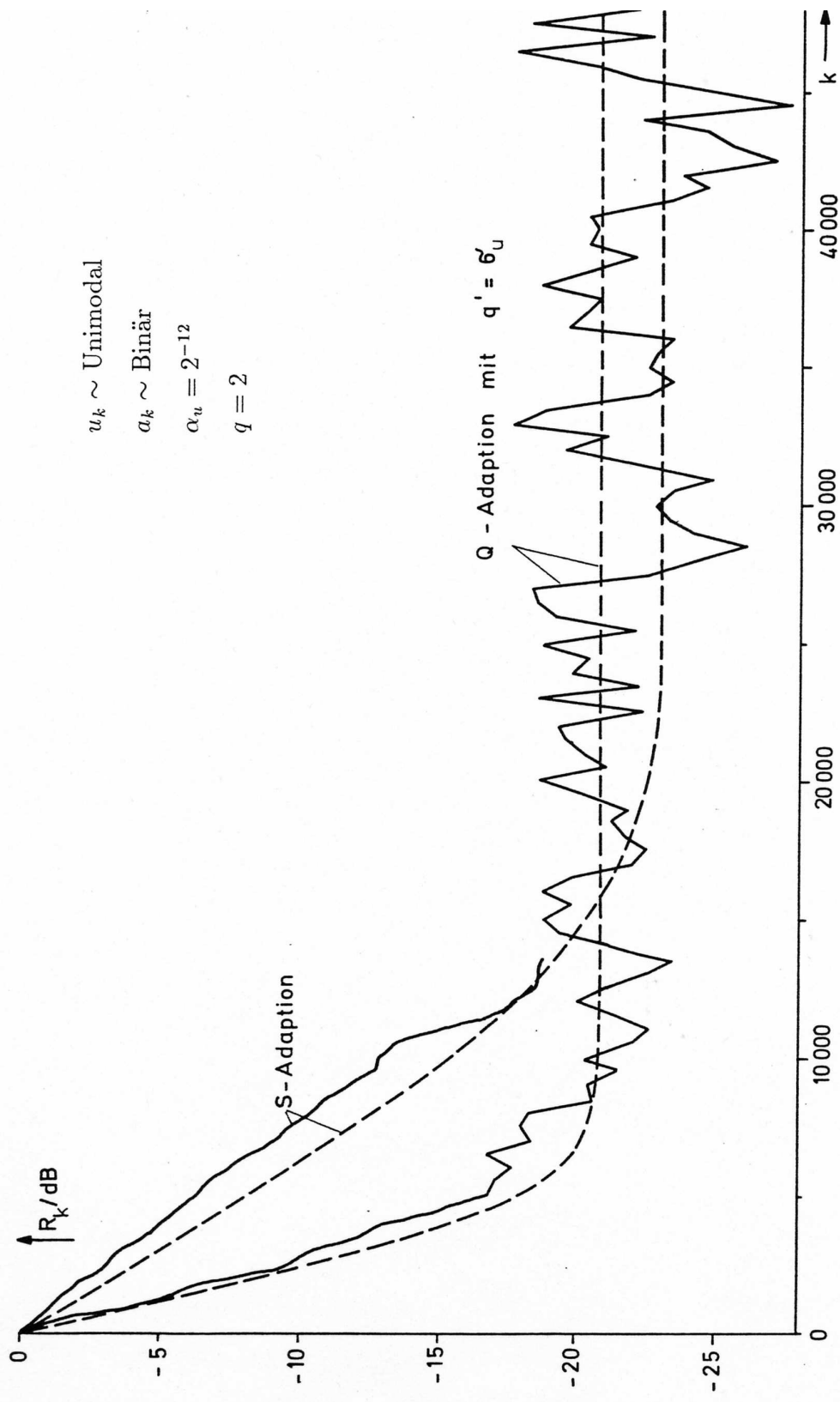


Bild 5.11: Simulierte EC-Einlaufkurven für Q- und S-Adaption bei $u_k \sim \text{Unimodal}$

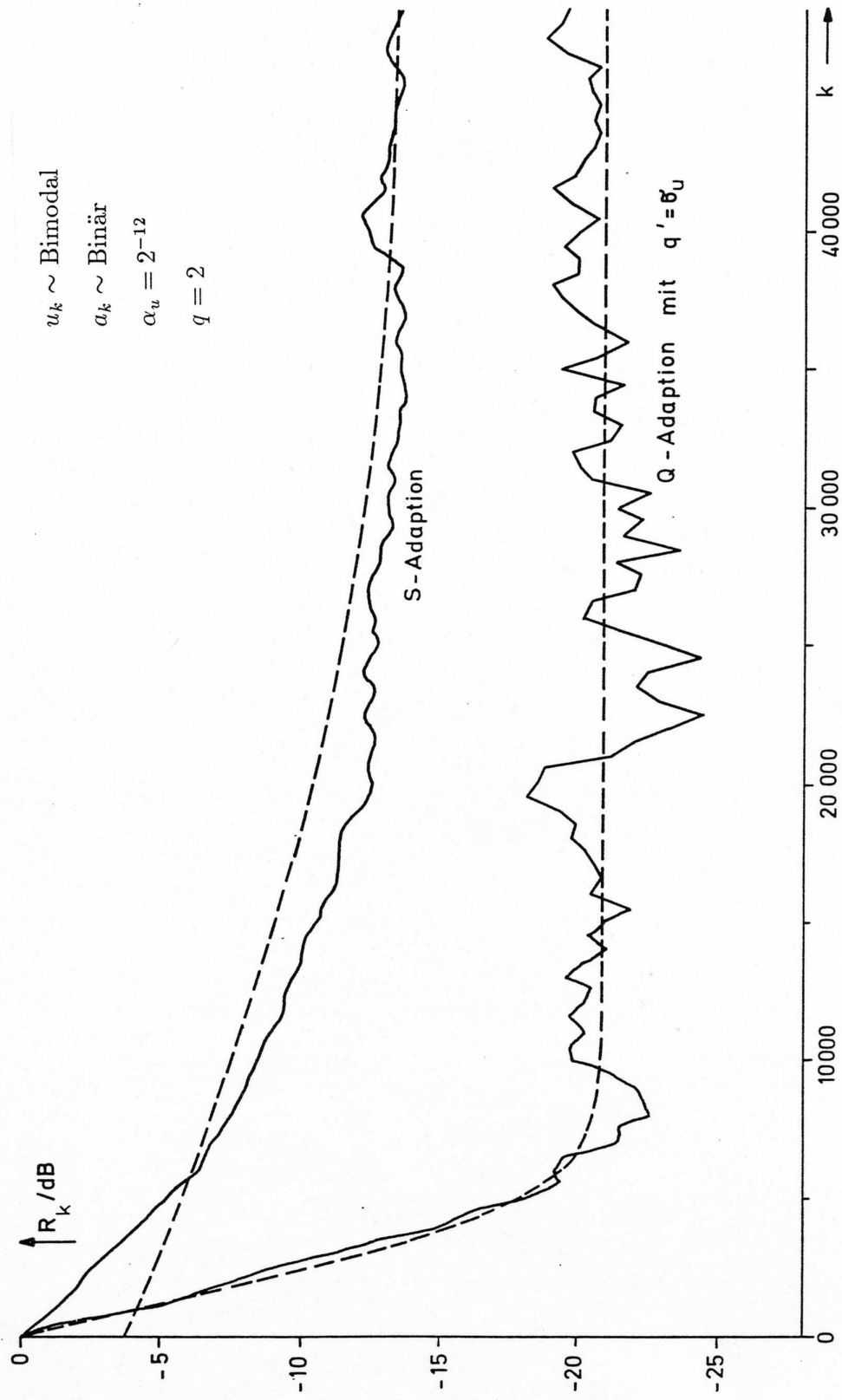


Bild 5.12: Simulierte EC-Einlaufkurven für Q- und S-Adaption bei $u_k \sim \text{Bimodal}$

Anders sind die Verhältnisse bei der in Bild 5.12 dargestellten bimodalen Verteilung. Durch die Q-Adaption wird der Restfehler reduziert bei gleichzeitiger Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit. Wie bereits nach Tabelle 5.1 zu erwarten war, besteht bei der Q-Adaption zwischen der unimodalen und der bimodalen Verteilung kein wesentlicher Unterschied mehr.

5.4.4 Gemeinsame Adaption von EC und DFE

Es werden folgende Voraussetzungen getroffen : Die beiden Datenfolgen a_k und b_k seien binär codiert mit $\sigma_a^2 = 1$. Die Nutzsinal-Impulsantwort aus Bild 5.2 führt zu unimodalen Verteilungen bei $u_k, u_k^*, u_{\text{DFE},k}$. Das Verhältnis von Echosignal zu Nutzsinal beträgt $D\{y_k\}/D\{x_k\} = +5$ dB und es gilt $K = 16$ für die AGC-Verstärkung. Als Rauschabstand wird $D\{n_k\}/D\{x_k\} = -40$ dB gewählt. Der A/D-Wandler wird mit 12 Bit Auflösung angesetzt. Bei Filterlängen von $L = 32$ und $L_{\text{DFE}} = 16$ verbleiben im Nutzsinal x_k keine unkompensierbaren Vor- und Nachschwinger von nennenswerter Größenordnung. Daraus folgt $D\{e_{\text{opt},k}\} = -34.8$ dB.

In den nachfolgenden Bildern sind die Verstellgrößen direkt angegeben ohne Bezug auf die Streuung der jeweiligen nicht-kompensierbaren Signale. Dick ausgezogen sind die Kurven für die Entscheiderfehler-Komponenten $D\{e_{\text{opt},k}\}, K \cdot D\{\varphi_k\}, D\{\varphi_{\text{DFE},k}\}$ gemäß (5.1-4) sowie dick gestrichelt für den gesamten Entscheiderfehler $D\{e_k\}$ im eingeschwungenen Zustand.

Die Simulationsergebnisse für die gemeinsame EC-DFE-Adaption sind in den Bildern 5.13 und 5.14 dargestellt. Der EC wird dabei mit dem Signal u_k hinter der EC-Kompensationsstelle und der DFE wird mit dem Entscheiderfehler e_k adaptiert. Ohne Beeinflussung durch den DFE läuft der EC hier wie gewohnt ein. Das Konvergenzverhalten des DFE wird dagegen durch den Verlauf der EC-Adaption prinzipiell beeinflusst. Um dabei den Unterschied zwischen K- und S-Adaption zu verstehen, wird erinnert an (siehe z.B. Tabelle 2.3) :

$$R_{\text{DFE},k} \text{ ist } \left\{ \begin{array}{ll} \text{unabhängig von } D\{u_{\text{DFE},k}\} & \text{bei K-Adaption} \\ \text{ist proportional zu } \frac{1}{\sqrt{D\{u_{\text{DFE},k}\}}} & \text{bei S-Adaption} \end{array} \right\} \quad (5.4-5)$$

In Bild 5.13 für die K-Adaption genügt $\alpha_{\text{DFE}} = 2^{-5}$, um die DFE-Komponente $D\{\varphi_{\text{DFE},k}\}$ im Entscheiderfehler wesentlich kleiner als die EC-Komponente $K \cdot D\{\varphi_k\}$ zu machen. Die DFE-Adaption ist so schnell, daß $R_{\text{DFE},k}$ als konstant erscheint. $D\{u_{\text{DFE},k}\}$ wird durch $\sigma_k = D\{\varphi_k\}$ dominiert und nimmt somit sehr langsam ab. Als Folge davon nimmt auch $D\{\varphi_{\text{DFE},k}\} = R_{\text{DFE},k} \cdot D\{u_{\text{DFE},k}\}$ mit der gleichen geringen Geschwindigkeit ab.

In Bild 5.14 für die S-Adaption ist die eigentliche DFE-Konvergenzphase schon nach etwa 15000 Takten abgeschlossen, während sich dabei der EC noch nahe seiner Anfangseinstellung befindet. Danach führt die sich nur langsam verbessernde EC-Einstellung zu einer ebenso langsamen Verbesserung von $D\{\varphi_k\}$ bzw. $D\{u_{DFE,k}\}$. Als Folge davon ergibt sich die zunächst vielleicht überraschende Tatsache, daß $R_{DFE,k}$ größer wird. Die theoretische Kurve dieser $R_{DFE,k}$ -Verschlechterung wird durch die simulierte Kurve sehr gut bestätigt.

In Bild 5.15 ist mit EC*-DFE-Einlaufkurve gemeint, daß sowohl EC wie DFE gleichzeitig mit dem Entscheiderfehler adaptiert werden (hier nur S-Adaption). Der Vergleich mit Bild 5.14 zeigt, daß die Konvergenzzeit nur noch 4 % gegenüber der EC-DFE-Adaption beträgt – obwohl zudem noch geringere Restfehler erreicht werden. Die Wortlänge der EC-Koeffizienten kann um mehrere Bit verkürzt werden. Bei der nicht durch ein Bild dargestellten K-Adaption verkürzt sich die Konvergenzzeit noch stärker von 200000 auf 400 Takte, so daß halbwegs glatte Einlaufkurven überhaupt nicht mehr abgeleitet werden können.

Es läßt sich allgemein zeigen, daß für $k \rightarrow \infty$ gleiche R -Werte zu gleichen Beiträgen der Restsignale zum Entscheiderfehler führen und daß dies durch ein bestimmtes Verhältnis der Verstellgrößen garantiert werden kann :

$$\begin{aligned}
 K \cdot \alpha \cdot L = \alpha_{DFE} \cdot L_{DFE} &\iff R_k^* = R_{DFE,k} \\
 &\iff K \cdot D\{\varphi_k\} = D\{\varphi_{DFE,k}\} \qquad (5.4-6)
 \end{aligned}$$

Bei $K = 16$, $L = 32$ und $L_{DFE} = 16$ wird diese Eigenschaft durch die Relation $\alpha = 2^{-5}\alpha_{DFE}$ erfüllt und so sind die Verstellgrößen in Bild 5.15 auch gewählt. Ab Taktnummer 8500 stimmen R_k^* und $R_{DFE,k}$ tatsächlich sehr gut überein. Auch der Endwert für $K \cdot D\{\varphi_k\} = D\{\varphi_{DFE,k}\}$ wird durch die Simulation sehr gut bestätigt.

Die gegenseitige Verkopplung von EC und DFE bewirkt bei der K-Adaption, daß sich R_k^* und $R_{DFE,k}$ unabhängig voneinander verbessern. Bei der S-Adaption gibt es jedoch einen gegenläufigen Effekt : Eine Verbesserung bei $R_{DFE,k}$ hat hier sofort eine Verschlechterung bei R_k^* zur Folge und umgekehrt ebenso. Dies ist ein wesentliches Charakteristikum wertdiskreter Adaptionsverfahren bei verkoppelten Filtern.

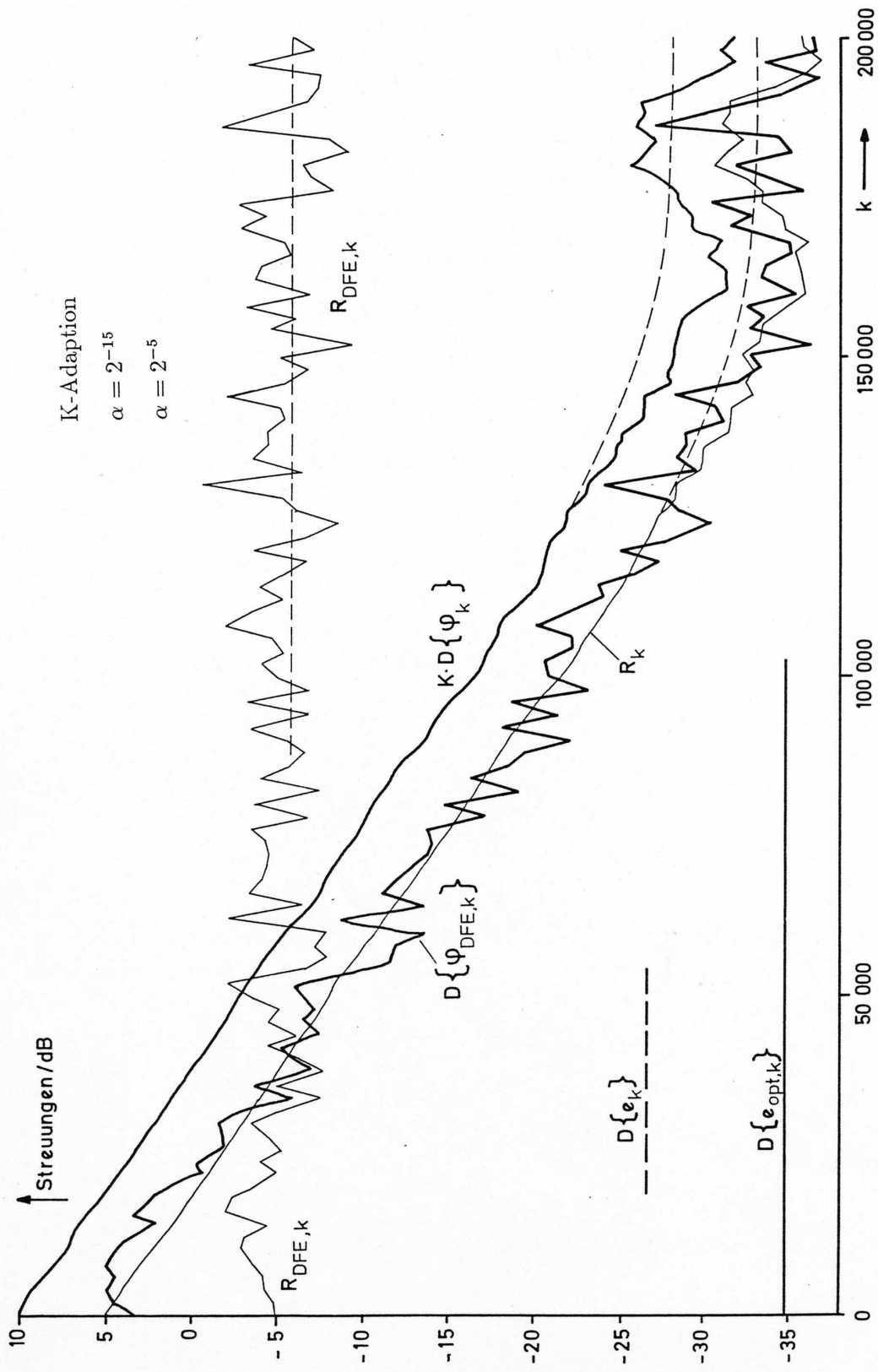


Bild 5.13: Simulierte EC-DFE-Einlaufkurven für K-Adaption

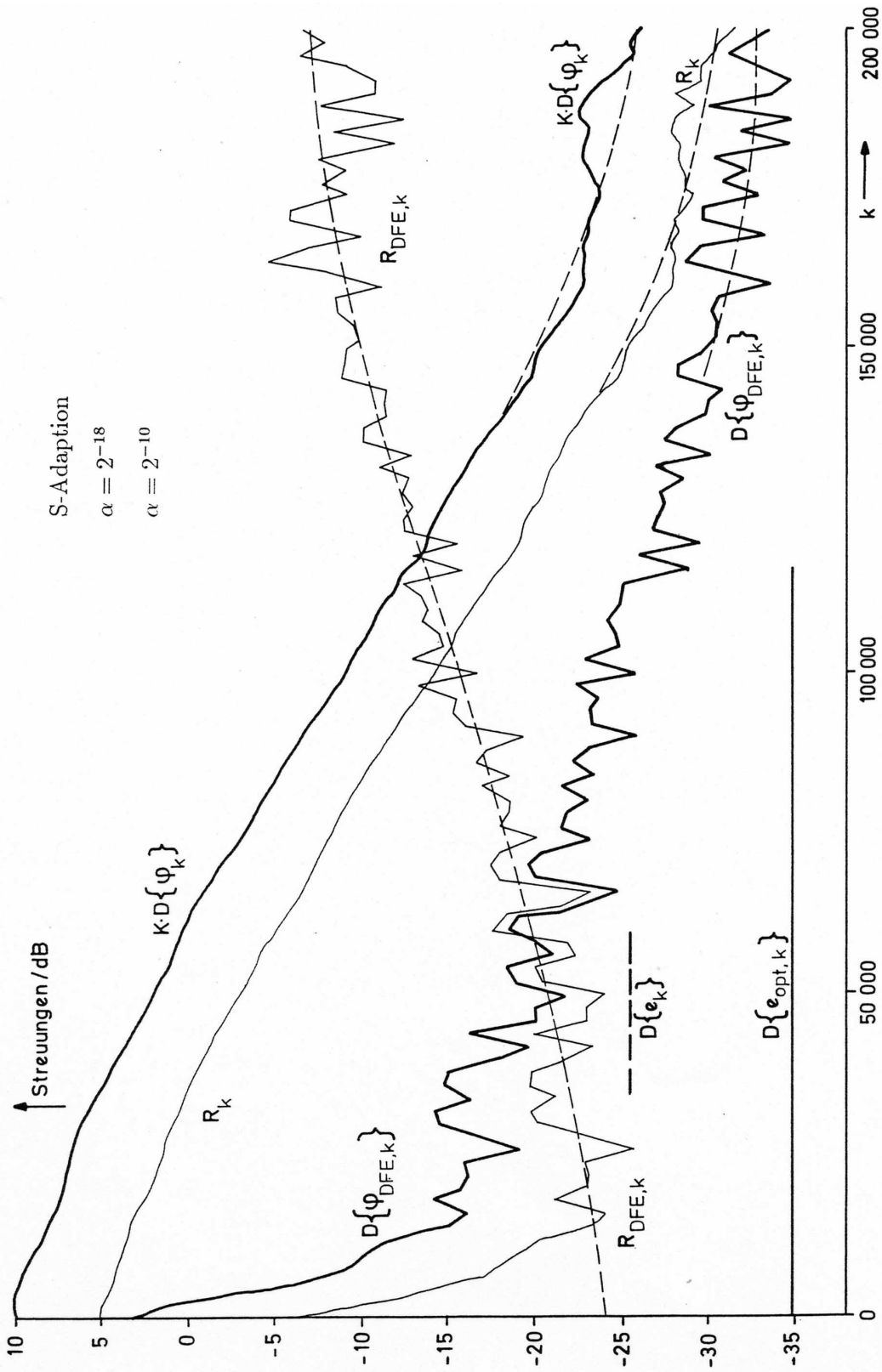


Bild 5.14: Simulierte EC-DFE-Einlaufkurven für S-Adaption

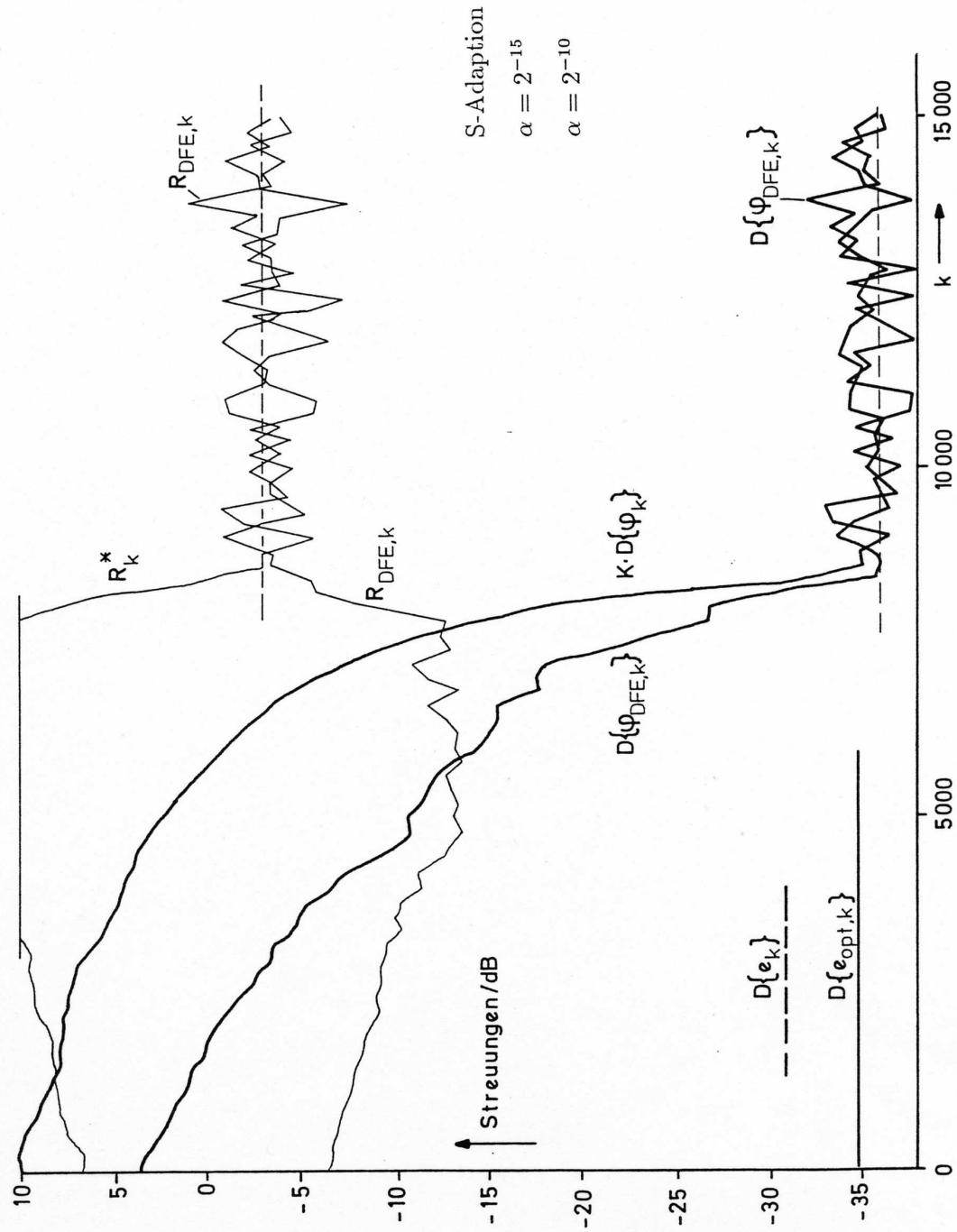


Bild 5.15: Simulierte EC*-DFE-Einlaufkurven für S-Adaption

Kapitel 6

Wortlängen-Dimensionierung eines speziellen Vollduplex-Empfängers nach der Fehlerwahrscheinlichkeit

Mit den Ergebnissen der vorangehenden Kapitel kann nun die Fehlerwahrscheinlichkeit bei beliebigen digitalen Empfängern zur Datenübertragung als Funktion der auftretenden Wortlängen berechnet werden.

Die Methoden zur Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit sind normalerweise wohlbekannt. Bisher unüblich, aber aufgrund der in dieser Arbeit abgeleiteten Ergebnisse nun sehr naheliegend ist die explizite Formulierung der Fehlerwahrscheinlichkeit als Funktion der Wortlängen. Dabei werden die Randbedingungen allerdings idealisiert, d.h. es werden keine Taktphasen-, Trägerphasen oder AGC-Schwankungen berücksichtigt. Ferner wird auch nicht die eigentliche Fehlerwahrscheinlichkeit, sondern eine in Abschnitt 6.2 erklärte bedingte Fehlerwahrscheinlichkeit berechnet.

Als Beispiel dient nun wieder der in Kapitel 5 eingeführte Vollduplex-Empfänger. Die wichtigsten Wortlängen – sowohl hinsichtlich der Übertragungsgüte wie des Realisierungsaufwandes – werden dabei durch die Koeffizienten von EC und DFE sowie durch den A/D-Wandler gegeben.

Vorausgesetzt wird die EC*-DFE-Konfiguration (also gemeinsame Adaption von EC und DFE mit dem Entscheiderfehler) mit S-Adaption, unimodale Verteilungen für das Nutzsignal und somit auch für die nicht-kompensierbaren Signale, als Leitungscode der Binärcode mit $\sigma_a^2 = 1$ sowie $L = 32$ und $L_{DFE} = 16$ für die Längen der adaptiven Filter. Ferner soll durch geeignete Wahl der Verstellgrößen die Eigenschaft (5.4-6) erfüllt sein.

6.1 Berechnung der Störleistungen als Funktion der Wortlängen

Für den A/D-Wandler mit der Quantisierungsschrittweite q_{AD} , der Wortlänge W_{AD} und dem Maximalwert M_{AD} gilt nach (A.3-6) der Zusammenhang :

$$q_{AD} = M_{AD} \cdot 2^{1-W_{AD}} \quad (6.1-1)$$

Wenn der A/D-Wandler genau auf den maximalen Empfangspegel angepaßt wird, gilt für die Auswirkung des A/D-Quantisierungsfehlers am Entscheider :

$$D\{K \cdot \delta_{AD,k}\} = K \cdot \frac{q}{\sqrt{12}} = K \cdot \max |x_k + y_k + n_k| \cdot \frac{2^{1-W_{AD}}}{\sqrt{12}} \quad (6.1-2)$$

Also ist das Verhältnis von maximalem Empfangssignal zum Hauptwert der Nutzsignal-Impulsantwort ($= 1/K$) der einzige für die Dimensionierung des A/D-Wandlers relevante Signalparameter.

Bei der S-Adaption entspricht der Quantisierungsabstand der wertdiskreten Koeffizienten genau der Verstellgröße. Mit den Maximalwerten M_C bzw. M_{CDFE} und den Wortlängen W_C bzw. W_{CDFE} der EC- bzw. DFE-Koeffizienten gelten die Zusammenhänge :

$$\alpha = M_C \cdot 2^{1-W_C} \quad (6.1-3)$$

$$\alpha_{DFE} = M_{CDFE} \cdot 2^{1-W_{CDFE}}$$

Die Umrechnung von α_u auf W_C erfolgt so :

$$\alpha_u = \frac{\alpha}{D\{u_k\}} = \frac{M_C}{D\{u_k\}} 2^{1-W_C} \approx \frac{M_C}{D\{x_k\}} 2^{1-W_C} \quad (6.1-4)$$

Signalparameter der Form "Verhältnis von Maximalwert der Echo-Impulsantwort zur Streuung des Nutzsymbols" werden auch als crest-Faktoren bezeichnet [4.5].

Der Maximalwert des Empfangssignals wird nun auf 1 normiert. Dann liegen bei dem Beispiel aus Bild 5.15 folgende Zahlenwerte für Nutzsymbols x_k und Echosymbols y_k vor (Impmax = Maximum der entsprechenden Impulsantwort) :

$$\max |x_k| = 0.33 \quad D\{x_k\} = 0.11 \quad \text{Impmax}(x_k) = 0.06 = 1/K$$

$$\max |y_k| = 0.67 \quad D\{y_k\} = 0.19 \quad \text{Impmax}(y_k) = 0.12 = M_C$$

Es gilt also $K = 16$, $M_C = 2^{-3}$ und aus Sicherheitsgründen wird $M_{\text{CDFE}} = 1$ festgelegt. Die angestrebte Eigenschaft (5.4-5), also gleiche Beiträge von EC und DFE zum Entscheiderfehler, wird in diesem Beispiel durch die Wortlängen-Relation

$$W_C = W_{\text{CDFE}} + 2 \quad (6.1-5)$$

garantiert. Abweichend von Abschnitt 5.4.4 wird $D\{n_k\}/D\{x_k\} = -22$ dB für den Rauschabstand festgelegt und weiter wird über $x_{\text{Vor},k}$ ein Vorschwinger von 45 % des Hauptwertes der Nutzsinal-Impulsantwort eingerechnet.

Über die Formeln (5.2-2) bis (5.2-5) aus Abschnitt 5.2 kann somit die Varianz des Entscheiderfehlers als Funktion von W_{AD} , W_C und W_{CDFE} berechnet werden. Mit (5.2-1) kann sogar die Verteilungsdichtefunktion des Entscheiderfehlers exakt bestimmt werden.

6.2 Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit als Funktion der Wortlängen

Für die Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit muß die Verteilung des Entscheiderfehlers bekannt sein. Um diese Verteilung exakt berechnen zu können, werden die Restsignale φ_k und $\varphi_{\text{DFE},k}$ nach Kapitel 3 und gemäß (5.2-1a) als normalverteilt angenommen.

Das Koeffizienten-Zittern kann also wie das thermische Rauschen behandelt werden. Dies gilt natürlich nur für die Amplituden-Verteilung und keinesfalls für die spektralen Eigenschaften der Restsignale. Im Vergleich zur Datenrate ist die Koeffizienten-Fehleinstellung extrem niederfrequent bzw. näherungsweise konstant, so daß die Restsignale in der Kurzzeit-Betrachtung sowohl hinsichtlich Verteilung wie spektraler Eigenschaften allein durch die entsprechenden Eigenschaften der Datenfolge bzw. des Leitungscodes geprägt sind. Erst über längere Zeit hinweg betrachtet stellt sich dann die Normalverteilung der Restsignale ein – aber für die Fehlerwahrscheinlichkeit ist auch nur diese Langzeit-Betrachtungsweise maßgebend.

Die spektralen Eigenschaften der Restsignale sind irrelevant, weil die Restsignale nicht mehr gefiltert werden und weil anstelle der eigentlichen Fehlerwahrscheinlichkeit eine bedingte Fehlerwahrscheinlichkeit P_a berechnet wird. P_a sei die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler unter der Voraussetzung, daß der vorangehende Abschnitt fehlerfrei ist (der fehlerfreie Abschnitt soll dabei mindestens so lang wie die DFE-Länge sein). Für P_a brauchen deshalb auch Effekte durch Fehlerfortpflanzung im DFE nicht berücksichtigt zu werden.

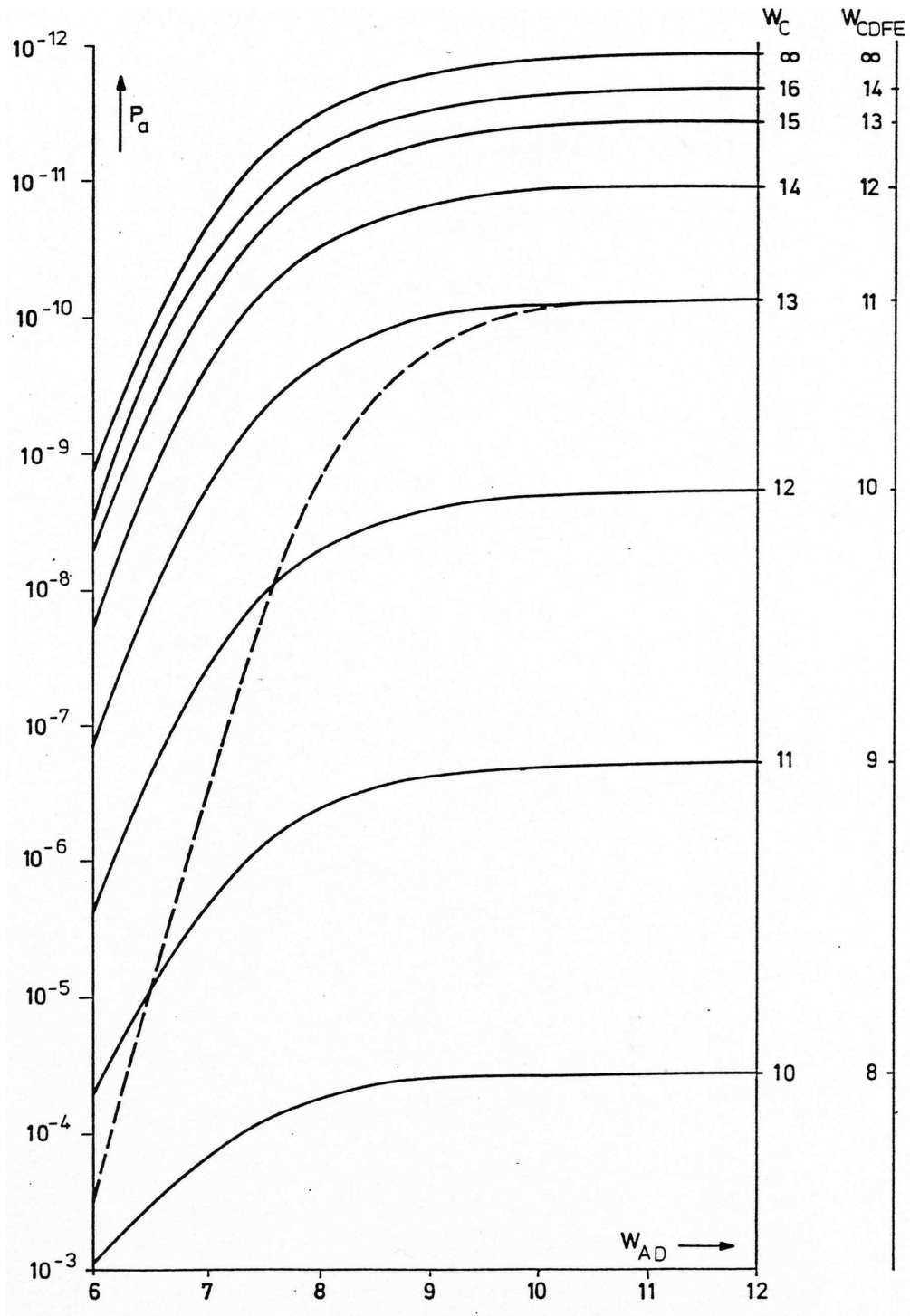


Bild 6.1: Fehlerwahrscheinlichkeit P_a in Abhängigkeit von den wichtigsten Wortlängen

In der Praxis ist P_a oftmals wichtiger als die eigentliche Fehlerwahrscheinlichkeit : Üblicherweise werden die Daten in Blöcken übertragen, die durch (dem Empfänger bekannte) Synchronisationsinformation getrennt sind. Wenn ein Block einen Fehler enthält, ist es sinnvoll, wenn dann der gesamte Block als fehlerhaft eingeordnet wird. Diese Blockfehlerrate kann direkt aus P_a berechnet werden.

Für den Binärcode gilt leicht einsehbar :

$$P_a = P\{e_k \leq -1\} \quad (6.2-1)$$

Die numerische Berechnung von P_a ist problemlos : Die Verteilungsdichtefunktion des Entscheiderfehlers e_k ergibt sich als Faltung einer Normalverteilung mit einer gleichmäßigen und einer binären Verteilung und über diese Funktion wird dann integriert.

Für die am Ende von Abschnitt 6.1 spezifizierte Situation wird in Bild 6.1 die bedingte Fehlerwahrscheinlichkeit P_a als Funktion der Wortlängen W_{AD} , W_C und W_{CDFE} berechnet. Offensichtlich stellen 15 bzw. 13 Bit für die Koeffizienten-Wortlängen und 9 Bit für den A/D-Wandler gewisse Grenzen dar, über die hinaus ein erhöhter Aufwand keine nennenswerten Verbesserungen mehr bringt. Die gestrichelte Kurve bezieht sich auf den Fall $W_C = 13$, $W_{CDFE} = 11$ und hierbei wird der Quantisierungsfehler am A/D-Wandler fälschlicherweise als normalverteilt eingerechnet – die Abweichung zum richtigen Ergebnis erweist sich als ziemlich groß, d.h. es muß unbedingt die richtige Verteilung von $\delta_{AD,k}$ berücksichtigt werden. Insgesamt wird der A/D-Wandler neben den adaptiven Filtern als weitere wesentliche Quelle von Quantisierungsgeräuschen deutlich.

Die Überprüfung der theoretisch berechneten Ergebnisse aus Bild 6.1 mit Hilfe von Simulationen (Fehlerzählung) gelingt aus Aufwandgründen nur bis $P_a \geq 10^{-4}$. Dabei ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung, sofern man für die Erzeugung der normalverteilten Zufallszahlen einen hinreichend genauen Zufallsgenerator verwendet.

Schon bei kleinen Änderungen in der Rauschleistung oder der Größe des Vorschwingers oder der Verstärkungskonstanten K verschieben sich die Kurven in Bild 6.1 ganz erheblich. Die speziellen Ergebnisse aus Bild 6.1 dürfen also nicht auf ähnliche Situationen übertragen werden, sondern müssen jeweils wieder neu berechnet werden.

6.3 Beispiel einer exakten Wortlängen-Dimensionierung

Für die Situation aus Bild 6.1 mit $W_C = 15$, $W_{CDFE} = 13$ und $W_{AD} = 9$ erfolgt nun eine Dimensionierung sämtlicher Wortlängen im Empfänger. In Bild 6.2 ist das

Ergebnis in Form von Tripeln (Wortlänge, Maximalwert, Quantisierungsschrittweite) dargestellt.

Für den Empfänger wird eine vorgeschaltete Pegelregelung im analogen Teil vorausgesetzt, so daß der Maximalwert des am A/D-Wandler anliegenden Signals immer als konstant 1 angenommen werden kann. Somit führt $W_{AD} = 9$ auf eine Quantisierungsschrittweite von 2^{-8} .

Die Angaben für den EC in Bild 6.1 haben sich auf den Fall $M_C = 2^{-3}$ bezogen und somit ergibt sich das Tripel $(15, 2^{-3}, 2^{-17})$ als Beschreibung der EC-Koeffizienten. Aus Sicherheitsgründen muß für den allgemeinen Fall als Maximalwert der EC-Koeffizienten der Maximalwert 1 des quantisierten Empfangssignals möglich sein. Somit erhöht sich die Wortlänge der EC-Koeffizienten um 3 Bit : $(18, 1, 2^{-17})$. Der Maximalwert des Akkumulators kann auf 1 gesetzt werden, denn Überläufe im Akkumulator sind aufgrund der Normierung ausgeschlossen. Vom Akkumulationsergebnis werden die 9 letzten Bits abgeschnitten, so daß die Quantisierungsschrittweiten an der EC-Kompensationsstelle zusammenpassen.

Die Verstärkungskonstante K nimmt nur positive Werte etwa im Bereich von 0 bis $2^4 = 16$ an. Als Auflösung ist eine Quantisierungsabstand von $2^{-4} = 0.0625$ vorgesehen, womit eine 9*8-Bit Multiplikation erforderlich wird. Das Multiplikationsergebnis ist durch $(17, 2^4, 2^{-12})$ gekennzeichnet. Durch Abschneiden des höchstwertigsten Bits und der 4 niedrigwertigsten Bits ergibt sich $(12, 2^3, 2^{-8})$. Der Maximalwert 8 ist dabei für alle Fälle ausreichend.

Die Angaben für die DFE-Koeffizienten sind klar. Anders als beim EC müssen hier für den Akkumulator aber 3 Bit zusätzlich vorgesehen werden, weil die Summe der Abtastwerte der Impulsantwort natürlich wesentlich größer als ihr Hauptwert sein kann (beim EC ist dagegen die Gesamtsumme der Abtastwerte der Impulsantwort kleiner als der Maximalwert des Empfangssignals).

Vom DFE-Ausgangssignal werden 4 Bit abgeschnitten, so daß der Quantisierungsabstand zu dem Signal nach der AGC paßt. Für den Entscheiderfehler ergibt die Quantisierung auf 1 Bit genau die S-Adaption.

In Bild 6.3 werden die Wortlängen im Echolöcher nochmals detaillierter angegeben, wobei das Prinzip der verwendeten symbolischen Darstellung [4.5] entnommen wurde. Die Länge eines senkrechten Balkens entspricht der Wortlänge und die Position des unteren Balkenendes im Wertigkeits-Niveau entspricht dem Quantisierungsabstand.

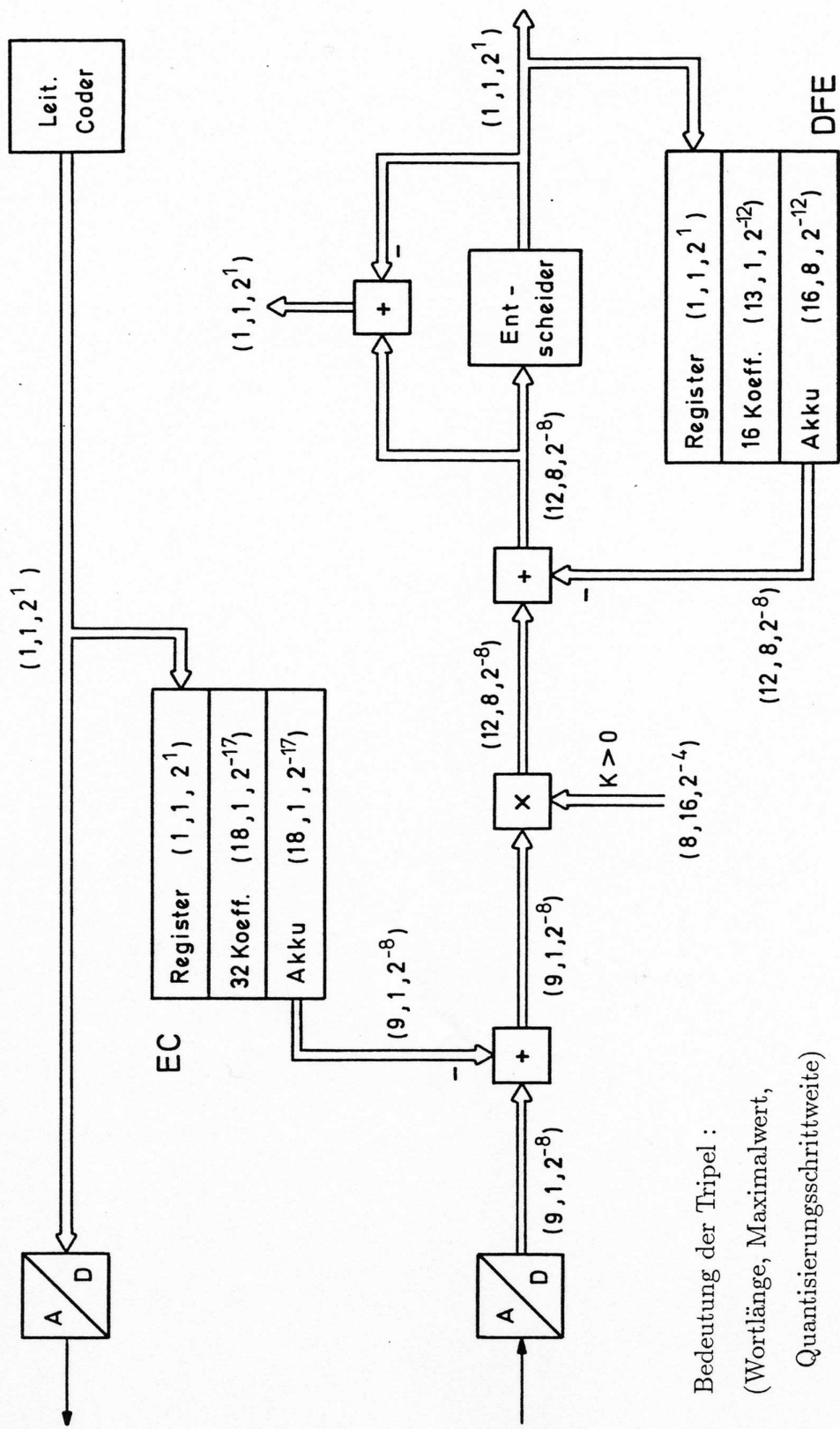


Bild 6.2: Mindestwortlängen im gesamten Empfänger

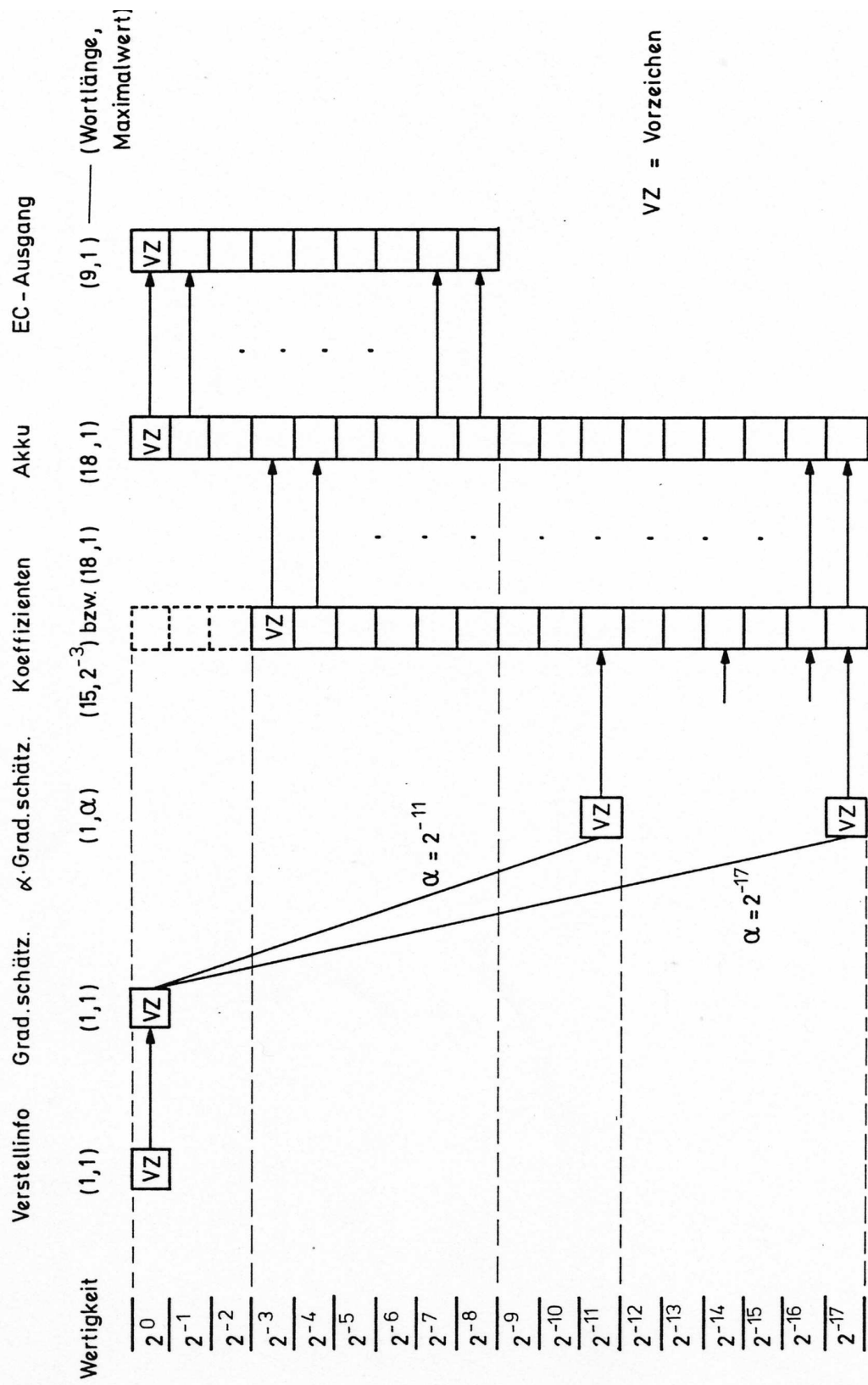


Bild 6.3: Symbolische Darstellung der Wortlängen im Echolöcher

In der Bildmitte sind die Koeffizienten mit 15 bzw. 18 Bit dargestellt. Nach rechts schließt sich der Akkumulator mit in jedem Fall 18 Bit an, von denen nur die 9 höchstwertigsten Bits an die EC-Kompensationsstelle gehen. Im linken Bildteil ist die Adaption dargestellt. Die binäre Gradientenschätzung ergibt sich aus der Multiplikation der binären Verstellsinformation mit dem binären Schieberegister-Inhalt. Die Multiplikation mit der Verstellsgröße bedeutet in der symbolischen Darstellung eine Verschiebung in der Wertigkeit nach unten. Die Koeffizienten-Adaption wird dann als Addition der verschobenen Gradientenschätzung zu der entsprechenden Stelle im Koeffizienten-Wort realisiert. In Bild 6.3 ist noch die Möglichkeit umschaltbarer Verstellsgrößen angegeben, z.B. von 2^{-11} (Anfangsadaption) über 2^{-14} und 2^{-16} bis 2^{-17} (eingeschwungener Zustand).

Es ist vielleicht überraschend, daß das EC-Ausgangssignal viel gröber quantisiert wird als die EC-Koeffizienten. Im Extremfall eines adaptiven Filters mit nur einem Koeffizienten wäre das natürlich grotesk. Bei mehreren Koeffizienten führt die angegebene Dimensionierung jedoch zu keinen wesentlichen Verschlechterungen in der Genauigkeit der Koeffizienten-Einstellung, wie man leicht einsehen und auch per Simulation überprüfen kann :

Es muß zunächst grundsätzlich nur sichergestellt sein, daß sich kleinste Änderungen der Koeffizienten in der Statistik der Verstellsinformation ausprägen. Dazu muß der Akkumulator natürlich mit der vollen Wortbreite der Koeffizienten arbeiten, weil sonst diese Wortbreite gleich verkürzt werden könnte. Die Wortbreite des EC-Ausgangssignals kann jedoch bei mehreren Koeffizienten verkürzt werden, wie mit Bild 4.2 plausibel wird : Ein Akku-Eingang sei x_a und die Summe der anderen Akku-Eingänge sei x_b . Der quantisierte Akku-Ausgang ist dann $Q(x_a + x_b)$ und aus diesen Werten können gewisse statistische Eigenschaften von x_a wieder zurückgewonnen werden, d.h. kleinste Änderungen eines Koeffizienten prägen sich weiterhin im quantisierten Ausgangssignal und damit in der Verstellsinformation aus.

Auch bei der reinen S-Adaption ohne weitere Quantisierung im EC-Ausgangssignal wirken sich in der mit 1 Bit quantisierten Verstellsinformation noch kleinste Änderungen eines Koeffizienten aus. Diese Tatsache ist in der in Kapitel 2 entwickelten Theorie bzw. in Satz 2.2 enthalten, denn mit hinreichend kleiner Verstellsgröße bzw. kleinem Quantisierungsabstand der Koeffizienten wird die Koeffizienten-Einstellung beliebig genau.

Anhang A

Einfache mathematische Grundlagen und Beweise

A.1 Grundbegriffe zu Zufallsvariablen

Es sei x eine beliebige Zufallsvariable. Mit $E\{.\}$ wird der Erwartungswert-Operator bezeichnet : $\mu = E\{x\}$. Für den Streuungs-Operator wird $D\{.\}$ geschrieben :

$$\sigma_x = D\{x\} = \sqrt{E\{x^2\} - \mu^2} \quad (\text{A.1-1})$$

Dann ist $\sigma_x^2 = D^2\{x\}$ die Varianz von x , die bei $\mu = 0$ mit der Leistung $E\{x^2\}$ übereinstimmt.

Zu x wird die Verteilungsfunktion immer mit $F_x(.)$, die Verteilungsdichtefunktion (im Fall der Existenz) mit $f_x(.)$ und die charakteristische Funktion mit $C_x(\chi)$ bezeichnet. Es gilt also :

$$F_x(\xi) = P\{x \leq \xi\} \quad (\text{A.1-2})$$

$$f_x(\xi) = \frac{d F_x(\xi)}{d \xi} = F'_x(\xi) \quad (\text{A.1-3})$$

$$\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \quad C_x(\chi) = E\{\exp(-j2\pi\chi x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\chi\xi) f_x(\xi) d\xi \quad (\text{A.1-4})$$

Die charakteristische Funktion ist hier direkt als Fourier-Transformierte der Verteilungsdichtefunktion definiert, um die bekannten Eigenschaften der Fourier-Transfor-

mation sofort anwenden zu können. Oftmals wird allerdings auch $C_x(-\chi/2\pi)$ als charakteristische Funktion bezeichnet.

Im Fall der Existenz können die r -ten Momente von x aus der r -ten Ableitung der charakteristischen Funktion berechnet werden [6.3] :

$$C_x^{(r)}(0) = (-j2\pi)^r \cdot E\{x^r\} \quad ; \quad C_x(0) = 1 \quad (\text{A.1-5})$$

Ferner wird folgender Zusammenhang vermerkt :

$$F_x(\xi) \circ\bullet \frac{C_x(\chi)}{j2\pi\chi} + \frac{1}{2}\delta(\chi) \quad (\text{A.1-6})$$

Beispiele

(a) $x \equiv 0$, d.h. x ist identisch Null. Es gilt $F_x(\xi) = \delta_{-1}(\xi)$ (= Sprungfunktion), $f_x(\xi) = \delta(\xi)$ (= Dirac-Stoß) und $C_x(\chi) = 1$.

(b) x sei in $[-q/2, q/2]$ gleichmäßig verteilt. Dann gilt :

$$f_x(\xi) = \frac{1}{q} \text{rect}\left(\frac{\xi}{q}\right) \circ\bullet C_x(\chi) = \text{si}(\pi q \chi) = \frac{\sin(\pi q \chi)}{\pi q \chi} \quad (\text{A.1-7})$$

Dabei bezeichnet $\text{rect}(\cdot)$ die Rechteckfunktion :

$$\text{rect}(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| < 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.1-8})$$

(c) $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ (Kurzschreibweise für die Normalverteilung). Es gilt :

$$f_x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(\xi - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{A.1-9a})$$

$$F_x(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad (\text{A.1-9b})$$

$$C_x(\chi) = \exp(-2\pi^2\sigma^2\chi^2 - j2\pi\mu\chi) \quad (\text{A.1-9c})$$

Zu einer Zufallsvariablen x mit $\mu = E\{x\} = 0$ und $\sigma_x = D\{x\} \neq 0$ wird die auf Varianz 1 normierte Zufallsvariable

$$x_N = \frac{1}{D\{x\}} \cdot x \quad , \quad D\{x_N\} = 1 \quad (\text{A.1-10})$$

betrachtet, die stets durch den Index N gekennzeichnet wird. Die Verteilung von x_N wird auch als Verteilungstyp von x bezeichnet. Der Verteilungstyp aller $N(0, \sigma^2)$ -Verteilungen ist die $N(0, 1)$ -Verteilung und der Verteilungstyp aller gleichmäßigen Verteilungen ist die gleichmäßige Verteilung mit $\text{rect}(\xi/\sqrt{12})/\sqrt{12}$ als Verteilungsdichtefunktion. Es gelten die Zusammenhänge :

$$F_{x_N}(\xi) = F_x(\xi\sigma_x) \quad (\text{A.1-11})$$

$$f_{x_N}^{(r)}(\xi) = \sigma_x^{r+1} \cdot f_x^{(r)}(\xi\sigma_x) \quad \Longleftrightarrow \quad f_x^{(r)}(\xi) = \frac{1}{\sigma_x^{r+1}} \cdot f_{x_N}^{(r)}\left(\frac{\xi}{\sigma_x}\right) \quad (\text{A.1-12})$$

$$C_{x_N}^{(r)}(\chi) = \frac{1}{\sigma_x^r} \cdot C_x^{(r)}\left(\frac{\chi}{\sigma_x}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad C_x^{(r)}(\chi) = \sigma_x^r \cdot C_{x_N}^{(r)}(\chi\sigma_x) \quad (\text{A.1-13})$$

Für zwei normalverteilte mittelwertfreie Zufallsvariablen x_1 und x_2 (statistisch abhängig oder unabhängig) wird noch folgende Eigenschaft notiert [4.17] :

$$E\{x_1 \cdot \text{sign}(x_2)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{E\{x_1 \cdot x_2\}}{D\{x_2\}} \quad (\text{A.1-14})$$

A.2 Bedingte Verteilungen

Es seien x und y zwei beliebige Zufallsvariablen, die statistisch abhängig oder unabhängig sein dürfen. Aus der mit $f_{x,y}(\xi, \eta)$ bezeichneten Verbundverteilungsdichtefunktion wird die Verteilungsdichtefunktion von x gemäß

$$f_x(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(\xi, \eta) d\eta \quad (\text{A.2-1})$$

gewonnen. Die bedingte Verteilungsdichtefunktion $f_{x|y}(\xi|\eta)$ kann sowohl aus der bedingten Wahrscheinlichkeit $P\{x \leq \xi \mid y = \eta\}$ wie auch aus der Verbundverteilungsdichtefunktion berechnet werden :

$$f_{x|y}(\xi|\eta) = \frac{d}{d\xi} P\{x \leq \xi \mid y = \eta\} = \frac{f_{x,y}(\xi, \eta)}{f_y(\eta)} \quad (\text{A.2-2})$$

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen x wird jetzt unter der Randbedingung $y = \eta$ betrachtet. Jedem Wert η wird durch die Funktion g der bedingte Erwartungswert

$$g(\eta) = E\{x \mid y = \eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot f_{x|y}(\xi|\eta) d\xi$$

zugeordnet. Die damit definierte neue Zufallsvariable $g(y) = E\{x|y\}$ ist eine Funktion der Zufallsvariablen y . Für den Erwartungswert von $g(y)$ gilt :

$$\begin{aligned}
 E\{E\{x|y\}\} &= E\{g(y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) \cdot f_y(\eta) d\eta \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi f_{x|y}(\xi|\eta) \cdot f_y(\eta) d\xi d\eta \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(\xi, \eta) d\eta d\xi && \text{mit (A.2-2)} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot f_x(\xi) d\xi && \text{mit (A.2-1)} \\
 &= E\{x\}
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend kann geschrieben werden :

$$E\{E\{x|y\}\} = E\{x\} \quad (\text{A.2-3})$$

Eine ähnliche Formel wird noch für Abschnitt 3.3.1 benötigt. Nach (A.2-2) kann

$$f_{x,y}(\xi, \eta) = f_{x|y}(\xi|\eta) \cdot f_y(\eta)$$

geschrieben werden. Die Integration nach η ergibt gemäß (A.2-1) :

$$f_x(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x|y}(\xi|\eta) \cdot f_y(\eta) d\eta \quad (\text{A.2-4})$$

Durch den Übergang zur Stammfunktion (Integration nach ξ) ergibt sich schließlich das Resultat :

$$P\{x \leq \xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\{x \leq \xi | y = \eta\} \cdot f_y(\eta) d\eta = E\{P\{x \leq \xi | y\}\} \quad (\text{A.2-5})$$

A.3 Typen und Beschreibungen von Quantisierungskennlinien

Eine Quantisierungskennlinie bzw. ein Quantisierer wird allgemein durch eine Treppenfunktion $Q(\cdot)$ beschrieben, die hier zur Vereinfachung als punktsymmetrisch (ungerade) vorausgesetzt wird. Alle in dieser Arbeit betrachteten Quantisierer sind somit

von einem der beiden in Bild A.1 dargestellten Typen. Bei Typ 1 (auch “midtread” genannt) liegt bei 0 keine Sprungstelle vor und 0 ist möglicher Ausgangswert. Umgekehrt liegt bei Typ 2 (“midriser”) bei 0 eine Sprungstelle vor und 0 ist kein möglicher Ausgangswert.

Bild A.1 gibt auch an, wie die Numerierung der Sprungstellen s_n festgelegt wird. Dabei wird der Abstand q' der Sprungstellen als äquidistant angenommen :

$$q' = s_n - s_{n-1} \quad (\text{A.3-1})$$

Hierbei durchläuft n alle Sprungstellen von $Q(\cdot)$. Diese Vereinbarung für den Laufindex n soll für die gesamte Arbeit gelten, insbesondere auch für Summenformeln. Bei der Quantisierung der Verstellsinformation für das adaptive Filter können eventuell auch nicht-äquidistante Sprungstellen sinnvoll sein – in diesem Fall ist natürlich q' nicht definiert und es muß gefordert werden, daß die Sprungstellen s_n symmetrisch bzgl. 0 verteilt sind.

Die Ausgangswerte von $Q(\cdot)$ sind jedoch immer äquidistant mit dem Abstand

$$q = Q(s_n + 0) - Q(s_n - 0) \quad , \quad (\text{A.3-2})$$

der *Quantisierungsschrittweite* genannt wird. Um auf $Q(\cdot)$ die Fourier-Transformation anwenden zu können, muß jeder Funktionswert der Mittelwert der rechts- und linksseitigen Grenzwerte sein. Deshalb wird für die Sprungstellen definiert :

$$Q(s_n) = \frac{Q(s_n + 0) + Q(s_n - 0)}{2} \quad (\text{A.3-3})$$

Diese Eigenschaft muß natürlich nicht in der Praxis realisiert werden – aber die Theorie wird damit enorm vereinfacht. Für die Ableitung der Quantisierungskennlinie gilt mit der Dirac-Funktion :

$$Q'(\xi) = q \cdot \sum_n \delta(\xi - s_n) \quad (\text{A.3-4})$$

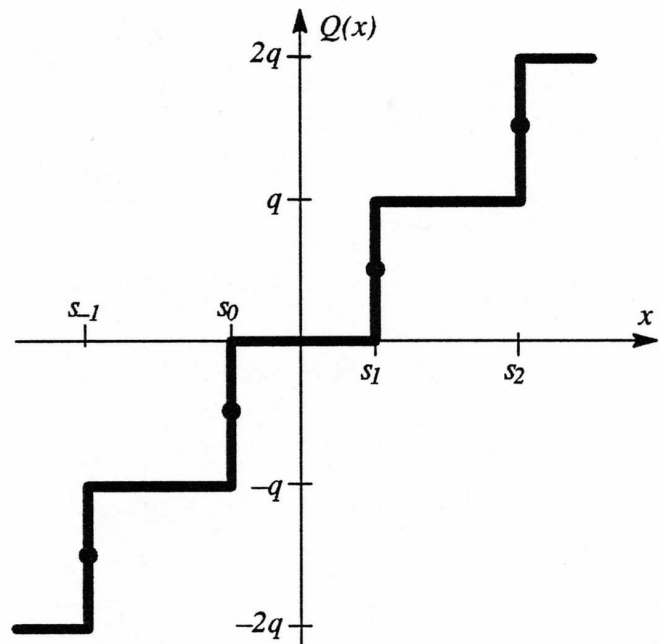
(Für diese Eigenschaft ist es also sinnvoll, die Quantisierung explizit als Funktion $Q(\cdot)$ zu schreiben). Bei vielen Anwendungen kann der Einfluß der Quantisierung allein mit der Formel (A.3-4) eingerechnet werden, was eine sehr elegante und übersichtliche Methode ist.

Typ 1 – Quantisierer

$$s_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) q'$$

$$Q((s_n, s_{n+1})) = nq$$

$$Q(s_n) = \left(n - \frac{1}{2}\right) q$$



Typ 2 – Quantisierer

$$s_n = nq'$$

$$Q((s_n, s_{n+1})) = \left(n + \frac{1}{2}\right) q$$

$$Q(s_n) = nq$$

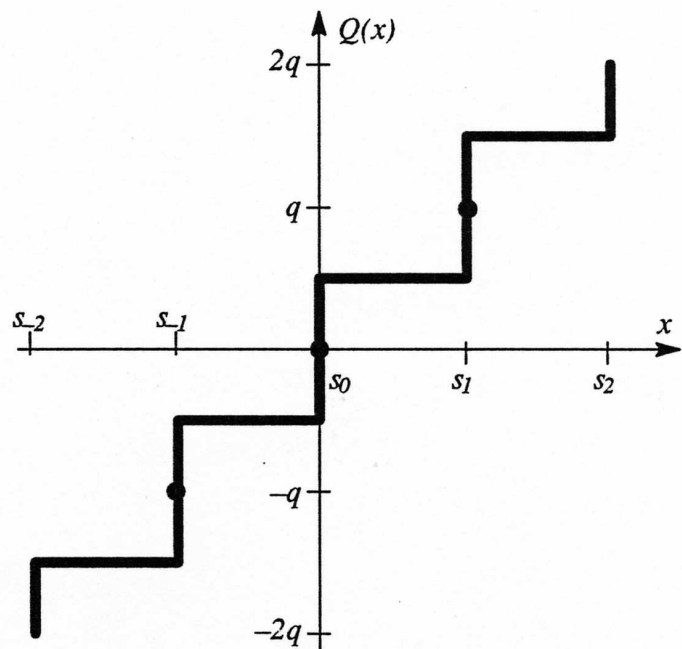


Bild A.1: Vergleich aller punktsymmetrischen Quantisierungskennlinien (q' = äquidistanter Sprungstellenabstand, q = Quantisierungsschrittweite)

Bei der Quantisierung sind folgende Situationen unterscheidbar :

- Quantisierung digitaler Werte : Hier geht es z.B. darum, die Wortlängen bei der Darstellung digitaler Signale zu verkürzen, was durch Rundungs- oder Abschneide-Operationen erreicht werden kann. Hierbei sind – eventuell mit Ausnahme des Bereichs von s_0 bis s_1 – die Sprungstellen äquidistant mit $q = q'$. Die Quantisierungskennlinie ist meist vom Typ 1, da bei Typ 2 die Null als Ausgangswert nicht möglich ist.

Das Zweier-Komplement, bei dem sich die größte positive und die größte negative Zahl betraglich unterscheiden, verletzt die vorausgesetzte Punktsymmetrie. Das ist jedoch unwesentlich, denn bei richtiger Dimensionierung wirkt sich die Begrenzer-Funktion des Quantisierers nicht aus.

- Quantisierung analoger Werte : Ein wichtiges Beispiel hierzu ist der A/D-Wandler am Eingang eines digitalen Empfängers. Die Sprungstellen sind dabei ebenfalls äquidistant mit $q = q'$. Die statistischen Eigenschaften von quantisierten Zufallssignalen werden in Kapitel 4 untersucht.
- Quantisierung der Verstellsinformation für adaptive Filter : Äquidistante hochauflösende Quantisierer sind hier nicht gefragt, sondern Quantisierer mit möglichst wenig verschiedenen Ausgangswerten. Das Problem der richtigen Verteilung der (nicht notwendigerweise äquidistanten) Sprungstellen wird nicht durch die Quantisierungstheorie aus Kapitel 4 gelöst, sondern wie in Kapitel 2 durch die Analyse der entsprechenden wertdiskreten Adaptionverfahren.

Der einfachste Fall ist hier natürlich die Quantisierung mit der sign-Funktion (S-Adaption), die bei Typ 2 mit $q = 2$ und $q' = \infty$ und $\{s_n\} = \{0\}$ enthalten ist.

Jeder Quantisierer mit Ausgangswerten endlicher Wortbreite wirkt natürlich auch als Begrenzer, d.h. es gibt eine Aussteuerungsgrenze s_{\max} und einen Maximalwert M_Q mit

$$|\xi| > s_{\max} \implies |Q(\xi)| = M_Q \quad (\text{A.3-5})$$

Die Aussteuerungsgrenze braucht aber meist überhaupt nicht explizit berücksichtigt zu werden, wenn Übersteuerungen schon durch eine richtige Dimensionierung vermieden werden.

Bei $W_Q =$ Wortlänge sind 2^{W_Q} Ausgangswerte darstellbar. Somit gilt mit der Quantisierungsschrittweite q und dem Maximalwert M_Q der Zusammenhang :

$$M_Q = q \cdot 2^{W_Q-1} \quad \text{bzw.} \quad W_Q = 1 + \text{ld}(M_Q/q) \quad (\text{A.3-6})$$

Mit dem nächsten Satz kann überprüft werden, ob die Ergebnisse bei der Q-Adaption mit den Ergebnissen bei der K-Adaption verträglich sind. Dazu wird Q durch immer feinere Stufung an die Identität $Q(\xi) = \xi$ angenähert. Aus der Definition des Integrals ergibt sich :

Satz A.1 Die Sprungstellen s_n seien äquidistant im Abstand q' . Dann gilt für jede stetige Funktion $h(\cdot)$:

$$\lim_{q' \rightarrow 0} \left(q' \cdot \sum_n h(s_n) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) d\xi$$

A.4 Konvergenz von Iterationsverfahren

In diesem Abschnitt werden zwei Sätze zur Konvergenz allgemeiner Iterationsverfahren formuliert, die in Kapitel 2 bei der Analyse der Adaptionen hinsichtlich Konvergenzgeschwindigkeit und EndEinstellung angewendet werden.

Definition A.1 Es sei I ein reelles Intervall von $T : I \rightarrow \mathcal{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion (d.h. die Ableitung ist stetig). Dann heißt

$$\|T\|_I = \sup_{v \in I} |T'(v)| \tag{A.4-1}$$

die *Norm* von T bezüglich I .

Zur Unterscheidung von der euklidischen Norm für Vektoren und um die Abhängigkeit vom Bezugsintervall zu verdeutlichen wird die Norm mit I indiziert. Damit $\|\cdot\|_I$ alle Bedingungen einer Norm erfüllt, müssen Funktionen, die sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, zu Äquivalenzklassen zusammengefaßt werden, was aber für das Folgende unwesentlich ist.

Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung kann man leicht zeigen, daß $\|T\|_I$ genau das Infimum aller Zahlen b ist, für die $|T(v) - T(w)| \leq b \cdot |v - w|$ für alle $v, w \in I$ gilt. Das ist die übliche Erklärung der Norm für nicht differenzierbare Funktionen. Aus dem unter sehr allgemeinen Voraussetzungen gültigen Fixpunktsatz von Banach (siehe z.B. [6.5]) ergibt sich der folgende für den Beweis von Satz 2.2 (siehe Anhang A.5) benötigte Spezialfall :

Satz A.2 I sei ein reelles abgeschlossenes, nicht notwendigerweise beschränktes Intervall und $T : I \rightarrow I$ sei eine Funktion von I nach I , die kontrahierend ist, d.h. $\|T\|_I < 1$.

Dann hat T genau einen Fixpunkt \hat{v} mit $T(\hat{v}) = \hat{v}$. Für das Iterationsverfahren $v_{k+1} = T(v_k)$ gilt mit beliebigem Startwert v_0 :

$$v_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \hat{v} \quad (\text{A.4-2})$$

Ferner gilt die Abschätzung :

$$|v_k - v_\infty| \leq \|T\|_I^k \cdot |v_0 - v_\infty| \quad (\text{A.4-3})$$

Aus (A.4-3) wird $\|T\|_I$ als bestimmende Größe der Konvergenzgeschwindigkeit ersichtlich. Oftmals hat T die einfache Gestalt $T(v) = Av + B$ mit reellen Zahlen A und B . In diesem Fall ist $\|T\|_I = |A|$ und offensichtlich gilt :

Satz A.3 Für das Iterationsverfahren $v_k = Av_k + B$ gilt :

$$v_k = A^k v_0 + B \frac{1 - A^k}{1 - A} \quad (\text{A.4-4})$$

Für $|A| < 1$ existiert der Grenzwert und entspricht dem Fixpunkt :

$$v_\infty = \frac{B}{1 - A} \quad (\text{A.4-5})$$

Weiter gilt :

$$|v_k - v_\infty| = |A|^k \cdot |v_0 - v_\infty| \quad (\text{A.4-6})$$

A.5 Beweis von Satz 2.2

Skizze des Beweisgangs : Zuerst wird die Existenz eines Fixpunktes $\hat{v} > 0$ mit $T(\hat{v}) = \hat{v}$ nachgewiesen. Dann wird das Intervall $I = [v_{\min}, v_0]$ mit $0 < v_{\min} < \hat{v}$ und $v_0 = \sigma_0^2$ (=Startwert) betrachtet. In diesem Intervall liegen die Werte aller auftretenden Restsignal-Varianzen. Für ein hinreichend klein gewähltes α wird $\|T\|_I < 1$ gezeigt. Schließlich wird $T : I \rightarrow I$ nachgewiesen, d.h. für $v \in I$ gilt auch $T(v) \in I$. Die Anwendung von Satz A.2 komplettiert dann den Beweis von Satz 2.2.

Der Beweisgang wird nun in 5 Schritte unterteilt :

1.Schritt Unter den Voraussetzungen von Satz 2.2 gilt für die Funktionen W und S gemäß Abschnitt 2.3.3 und 2.3.4 :

$W(\sigma), S(\sigma)$ sind stetig differenzierbar für $\sigma \geq 0$

$W(0) = 0$ wegen (2.3-26b)

$W(\infty) = \infty$ wegen (2.3-25b)

$0 < W'(\infty) < \infty$ wegen (2.3-27b) und endlich vieler Sprungstellen von Q

$W'(\sigma) > 0$ für $\sigma > 0$ wegen (2.3-27a)

$S(0) > 0$ sonst wäre $Q(u) \equiv 0$

$|S(\infty)| < \infty$ wegen der Beschränktheit von Q

$S'(\infty) = 0$ wegen (2.3-34c)

2.Schritt Zum Nachweis der Existenz eines Fixpunktes von T wird die Funktion

$$d(v) = v - T(v) = \alpha\sigma_a^2(2W(\sqrt{v}) - \alpha S(\sqrt{v}))$$

betrachtet. $d(v)$ ist stetig für $v \geq 0$ und es gilt $d(0) < 0$ und $d(\infty) = \infty$. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen existiert ein $\hat{v} > 0$ mit $d(\hat{v}) = 0$, d.h. $\hat{v} = T(\hat{v})$ ist ein Fixpunkt von T .

3.Schritt Die nachfolgend definierten Hilfsfunktionen

$$g_1(\sigma) = \frac{W'(\sigma)}{\sigma} \quad , \quad g_2(\sigma) = \frac{S'(\sigma)}{\sigma} \quad , \quad g(\sigma) = \frac{g_2(\sigma)}{g_1(\sigma)} = \frac{S'(\sigma)}{W'(\sigma)}$$

sind stetig und haben endliche Werte für $\sigma > 0$ mit

$$g_1(\infty) = 0 \quad , \quad g_2(\infty) = 0 \quad , \quad g(\infty) = 0$$

Für ein vorgegebenes $\sigma_{\min} = \sqrt{v_{\min}}$ mit $0 < v_{\min} < \hat{v}$ wird definiert :

$$K_g = \sup \{g(\sigma) \mid \sigma \geq \sigma_{\min}\}$$

$$K_1 = \sup \{g_1(\sigma) \mid \sigma \geq \sigma_{\min}\}$$

$$K_2 = \inf \{g_2(\sigma) \mid \sigma \geq \sigma_{\min}\}$$

(Für $\sigma_{\min} = 0$ müßte das Verhalten der 3 Hilfsfunktionen bei $\sigma = 0$ bekannt sein, was aber nicht der Fall ist – siehe jedoch (2.3-27c) und (2.3-36b)). Für $\sigma_{\min} > 0$ wie vorgegeben sind wegen der Stetigkeit der Funktionen die 3 Schranken endlich.

4.Schritt Es wird zunächst $\alpha < 2/K_g$ gewählt. Ferner wird das Intervall $I = [v_{\min}, v_0] = [\sigma_{\min}^2, \sigma_0^2]$ für die nachfolgenden Rechnungen gewählt. Die Ableitung von T gemäß (2.3-17) kann mit den Hilfsfunktionen g_1, g_2 so geschrieben werden :

$$T'(\sigma^2) = 1 - \alpha\sigma_a^2 g_1(\sigma) + \frac{\alpha^2 \sigma_a^2}{2} g_2(\sigma)$$

$T'(\sigma^2)$ wird nun für $\sigma^2 = v \in I$ betrachtet :

(a) Aus $\alpha < 2/K_g$ folgt

$$\frac{g_2(\sigma)}{g_1(\sigma)} = g(\sigma) \leq K_g < \frac{2}{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\alpha^2 \sigma_a^2}{2} g_2(\sigma) < \alpha\sigma_a^2 g_1(\sigma)$$

und damit dann $T'(\sigma^2) < 1$.

(b) Weiter gilt

$$T'(\sigma^2) \geq 1 - \alpha\sigma_a^2 K_1 + \frac{\alpha^2 \sigma_a^2}{2} K_2 > 0$$

Die rechte Abschätzung gilt entweder schon mit dem oben gewählten α oder kann durch eine weitere Verkleinerung von α erfüllt werden.

Mit (a) und (b) ist insgesamt

$$\|T\|_I = \sup \{ |T'(\sigma^2)| \mid v_{\min} \leq v \leq v_0 \} < 1$$

nachgewiesen. (Wegen $T'(\infty) = 1$ würde $\|T\|_{[v_{\min}, \infty)} = 1$ gelten und um dies zu vermeiden muß das Intervall I nach oben beschränkt gewählt werden).

5.Schritt Für den Nachweis der Konvergenz mit Satz A.2 muß noch nachgewiesen werden, daß für $v_{\min} \leq v \leq v_0$ immer $v_{\min} \leq T(v) \leq v_0$ gilt. (Für $v_{\min} = 0$ und $v_0 = \infty$ wäre das trivial, aber dann würde $\|T\|_I < 1$ nicht gelten). Es gilt mit dem Fixpunkt \hat{v} :

$$\frac{v_{k+1} - \hat{v}}{v_k - \hat{v}} = \frac{T(v_k) - T(\hat{v})}{v_k - \hat{v}} = T'(v^*) \quad , \quad \in (0, 1)$$

Die Existenz von v^* zwischen \hat{v} und v_k folgt aus dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Aus $v_k > \hat{v}$ folgt also $v_{k+1} > \hat{v}$, d.h. dies ist der formale Nachweis für die an sich selbstverständliche Tatsache, daß sich die Iteration oberhalb von \hat{v} abspielt. Weiter folgt $v_{k+1} - \hat{v} < v_k - \hat{v}$ und somit gilt generell

$$v_{\min} < \hat{v} < v_{k+1} < v_k < v_0$$

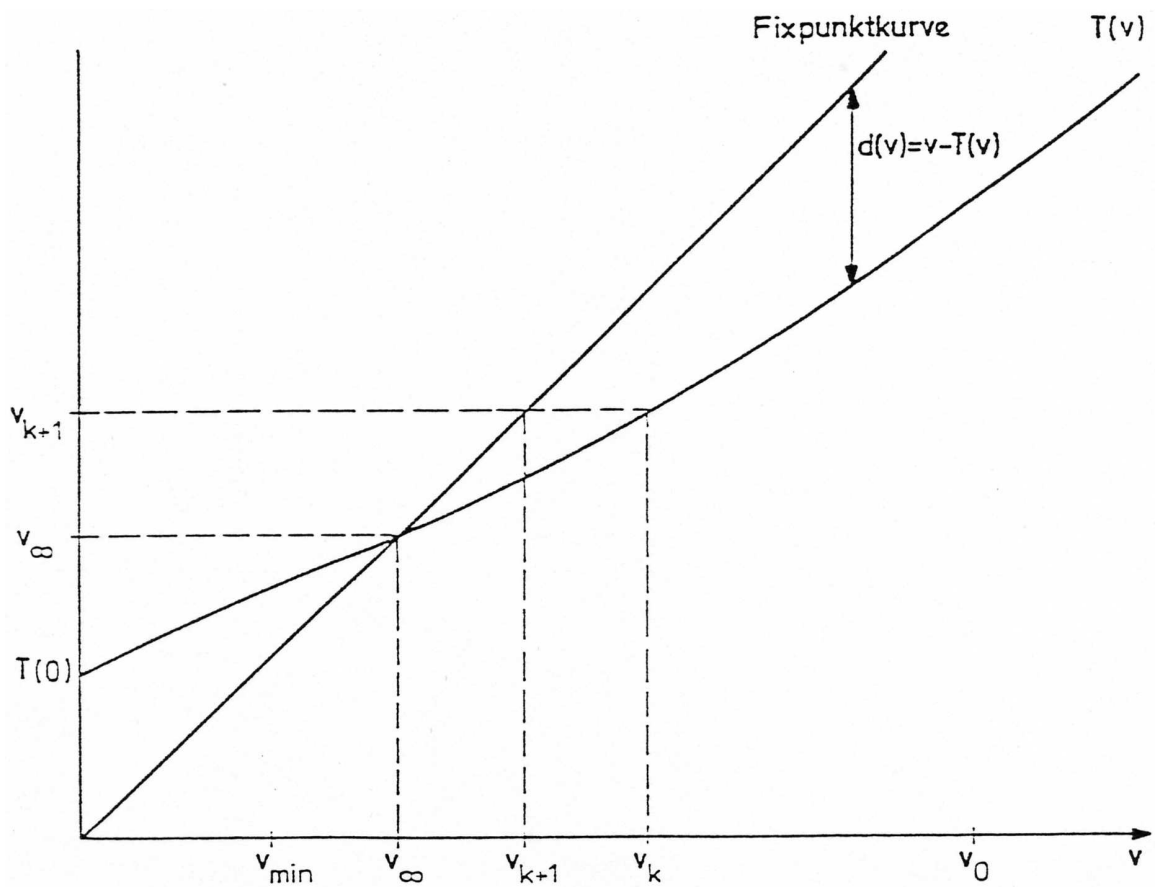


Bild A.2: Zur Demonstration des Beweises von Satz 2.2

und somit immer $v_k \in I = [v_{\min}, v_0]$.

Damit ist der Beweis abgeschlossen. Der Beweis kann auch im Fall der Taylor-Entwickelbarkeit der Verteilungsdichtefunktion des Signals u_k nicht wesentlich vereinfacht werden.

Die Verhältnisse veranschaulicht Bild A.2 : Wegen $T'(\infty) = 1$ wird $\|T\|_I$ um so größer, je größer das Intervall $I = [v_{\min}, v_0]$ gewählt wird. Für die Berechnung der Konvergenzgeschwindigkeit im interessierenden Bereich der EndEinstellung sollte I so schmal wie möglich um $\hat{v} = v_\infty$ gewählt werden.

A.6 Beweis von Satz 2.3

Zur Vereinfachung wird $\tilde{\mathbf{a}}_k = (\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{L-1})^T$ ohne den Index k geschrieben. Offensichtlich gilt

$$E\{\tilde{a}_i \tilde{a}_j\} = \lambda_i \cdot \delta_{i,j} \quad , \quad \text{d.h.} \quad E\{\tilde{a}_i^2\} = \lambda_i$$

und vorausgesetzt wird

$$E\{\tilde{a}_i^2 \tilde{a}_j^2\} = \lambda_i \lambda_j \quad (\text{bei } i \neq j)$$

$$E\{\tilde{a}_i \tilde{a}_j^3\} = 0 \quad (\text{bei } i \neq j)$$

$$E\{\tilde{a}_i^4\} = \vartheta \lambda_i^2$$

Diese Voraussetzungen sind erfüllt, wenn die \tilde{a}_i normalverteilt wären (weil dann die Unkorreliertheit die Unabhängigkeit gibt) mit $\vartheta = 3$ oder wenn die \tilde{a}_i binär wären mit $\vartheta = 1$. Beide Alternativen sind natürlich nicht exakt erfüllt (die \tilde{a}_i wären allerdings dann binär, wenn die a_i binär wären). Dennoch erscheint die Annahme mit $\vartheta = 3$ vernünftiger. Für die Elemente von \mathbf{W}_k (k wird wieder unterdrückt, $Z_{i,j}$ sollen die Elemente der Matrix \mathbf{Z}_k sein) gilt nun :

$$W_{l,m} = E \left\{ \sum_{i,j} (\tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T)_{l,i} Z_{i,j} (\tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_k^T)_{j,m} \right\} = \sum_{i,j} Z_{i,j} E\{\tilde{a}_l \tilde{a}_i \tilde{a}_j \tilde{a}_m\}$$

Für die Hauptdiagonale von \mathbf{W} gilt :

$$\begin{aligned} W_{l,l} &= \sum_{i,j} Z_{i,j} E\{\tilde{a}_l^2 \tilde{a}_i \tilde{a}_j\} = \sum_i Z_{i,i} E\{\tilde{a}_l^2 \tilde{a}_i^2\} \\ &= \vartheta Z_{l,l} \lambda_l^2 + \sum_{\substack{i \\ i \neq l}} Z_{i,i} \lambda_l \lambda_i = (\vartheta - 1) Z_{l,l} \lambda_l^2 + \lambda_l \text{Spur}(\mathbf{Z}\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Damit ist der obere Teil von (2.5-12) bewiesen. Für die Elemente von \mathbf{W} außerhalb der Hauptdiagonalen gilt mit $l \neq m$:

$$W_{l,m} = Z_{l,m} E\{\tilde{a}_l \tilde{a}_l \tilde{a}_m \tilde{a}_m\} + Z_{m,l} E\{\tilde{a}_l \tilde{a}_m \tilde{a}_l \tilde{a}_m\} = 2\lambda_l \lambda_m Z_{l,m}$$

Damit ist auch der untere Teil von (2.5-12) gezeigt.

A.7 Zur Varianzberechnung von Varianzschätzungen

Zum Nachweis der Aussagen aus Abschnitt 5.4.1 werden jetzt sowohl das Restsignal φ_k wie der Vektor ε_k der Koeffizienten-Fehleinstellung als normalverteilt vorausgesetzt.

(a) Zur Berechnung der Varianz von $\hat{\sigma}_{k,M}^2 = \sum_{i=0}^{M-1} \varphi_{k-i}^2 / M$ gemäß (5.4-1) wird vorausgesetzt, daß sich $\sigma_k^2 = E\{\varphi_k^2\}$ während der Mittelungsdauer nicht nennenswert ändert und somit gilt $E\{\hat{\sigma}_{k,M}^2\} = \sigma_k^2$. Aus der (zunächst willkürlichen) Annahme unkorrelierter Restsignale folgt :

$$E\{\hat{\sigma}_{k,M}^4\} = \frac{1}{M^2} \left(\sum_{i=0}^{M-1} E\{\varphi_{k-i}^4\} + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{M-1} E\{\varphi_{k-i}^2\} E\{\varphi_{k-j}^2\} \right)$$

Wegen der Normalverteilung von φ_k gilt $E\{\varphi_k^4\} = 3\sigma_k^4$ und somit folgt :

$$E\{\hat{\sigma}_{k,M}^4\} = \frac{1}{M^2} (M \cdot 3\sigma_k^4 + (M^2 - M) \cdot \sigma_k^4) = \frac{M+2}{M} \sigma_k^4$$

Für die Varianz ergibt sich

$$D^2\{\hat{\sigma}_{k,M}^2\} = E\{\hat{\sigma}_{k,M}^4\} - E^2\{\hat{\sigma}_{k,M}^2\} = \frac{M+2}{M} \sigma_k^4 - \sigma_k^4 = \frac{2}{M} \sigma_k^4$$

und schließlich folgt :

$$\frac{D\{\hat{\sigma}_{M,k}^2\}}{E\{\hat{\sigma}_{M,k}^2\}} = \sqrt{\frac{2}{M}} \quad (\text{A.7-1})$$

Dieses Ergebnis wird in der Praxis aber nicht bestätigt und somit ist die Annahme unkorrelierter Restsignale unzulässig – auch bei unkorrelierten Leitungscodes. Erst für $|k-l| > L$ ist das Schieberegister des adaptiven Filters vollständig neu mit a_k 's besetzt und φ_k und φ_l können als unkorreliert angenommen werden. Die Schätzung $\hat{\sigma}_{k,M}^2$ wird sich also nicht wesentlich verschlechtern, wenn nur jeder l -te Wert φ_k für die Mittelung benutzt wird. Wenn dennoch alle Zwischenwerte hinzugenommen werden, ist in (A.7-1) M durch M/L zu ersetzen :

$$\frac{D\{\hat{\sigma}_{M,k}^2\}}{E\{\hat{\sigma}_{M,k}^2\}} = \sqrt{\frac{2L}{M}} \quad (\text{A.7-2})$$

Dieses Ergebnis wird durch die Simulationen in etwa bestätigt.

(b) Die Varianzberechnung von $\hat{\sigma}_k^2 = \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\Phi}_{aa} \boldsymbol{\varepsilon}_k$ gemäß (5.4-2) gelingt im Gegensatz zur vorangehend untersuchten Schätzung (5.4-1) nun exakt :

Die Matrix $\mathbf{Z}_k = E\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^T\}$ konvergiert nach Satz 2.4 für die K-Adaption gegen die Diagonalmatrix \mathbf{Z}_∞ , die für kleines α konstante Diagonalelemente hat und somit ein Vielfaches d der Einheitsmatrix ist : $\mathbf{Z}_k \approx d\mathbf{E}$. Wegen $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{V} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ nach (2.5-3) gilt somit auch

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T\} = \mathbf{V} E\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^T\} \mathbf{V}^T = d \mathbf{V} \mathbf{E} \mathbf{V}^T = d \mathbf{E}$$

Satz 2.3 lautet mit $\mathbf{A} = E\{\tilde{\boldsymbol{a}}_k \tilde{\boldsymbol{a}}_k^T\}$ und $\vartheta = 3$:

$$E\{\tilde{\boldsymbol{a}}_k \tilde{\boldsymbol{a}}_k^T \mathbf{Z}_k \tilde{\boldsymbol{a}}_k \tilde{\boldsymbol{a}}_k^T\} = \mathbf{A} \text{Spur}(\mathbf{Z}_k \mathbf{A}) + 2 \mathbf{A} \mathbf{Z}_k \mathbf{A}$$

Dieser Satz liefert mit $d\mathbf{E} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T\}$ in direkter Analogie auch folgendes Resultat ($\vartheta = 3$ gilt für normalverteiltes $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ exakt) :

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\Phi}_{aa} \boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T\} = d^2 \left(\mathbf{E} \text{Spur}(\boldsymbol{\Phi}_{aa} \mathbf{E}) + 2 \mathbf{E} \boldsymbol{\Phi}_{aa} \mathbf{E} \right) \quad (\text{A.7-3})$$

Hiermit gilt nun :

$$\begin{aligned} E\{\hat{\sigma}_k^4\} &= E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\Phi}_{aa} \boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\Phi}_{aa} \boldsymbol{\varepsilon}_k\} \\ &= \text{Spur} \left(\boldsymbol{\Phi}_{aa} \cdot E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\Phi}_{aa} \boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T\} \right) \\ &= d^2 \cdot \text{Spur} \left(\boldsymbol{\Phi}_{aa} \cdot \text{Spur}(\boldsymbol{\Phi}_{aa}) + 2 \boldsymbol{\Phi}_{aa}^2 \right) \quad \text{mit (A.7-3)} \\ &= d^2 \cdot \text{Spur}^2(\boldsymbol{\Phi}_{aa}) \left(1 + 2 \frac{\text{Spur}(\boldsymbol{\Phi}_{aa}^2)}{\text{Spur}^2(\boldsymbol{\Phi}_{aa})} \right) \\ &= (d \cdot L \sigma_a^2)^2 \cdot (1 + 2\gamma) \quad , \quad \gamma = \frac{\text{Spur}(\boldsymbol{\Phi}_{aa}^2)}{\text{Spur}^2(\boldsymbol{\Phi}_{aa})} = \frac{\sum_{i=0}^{L-1} \lambda_i^2}{\left(\sum_{i=0}^{L-1} \lambda_i \right)^2} \quad (\text{A.7-4}) \end{aligned}$$

In Abschnitt 5.4.1 wurde schon

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= E\{\hat{\sigma}_k^2\} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\Phi}_{aa} \boldsymbol{\varepsilon}_k\} \\ &= \text{Spur}(E\{\boldsymbol{\Phi}_{aa} \boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T\}) = \text{Spur}(\boldsymbol{\Phi}_{aa} \cdot d\mathbf{E}) = dL\sigma_a^2 \quad (\text{A.7-5}) \end{aligned}$$

Code :	Binär	MMS43	AMI
$L = 4$	0.250	0.268	0.345
$L = 8$	0.125	0.136	0.180
$L = 16$	0.063	0.069	0.092
$L = 32$	0.031	0.035	0.042

Tabelle A.1: Der Parameter γ bei verschiedenen Leitungscodes

gezeigt, so daß für die Varianz nun folgt :

$$D^2\{\hat{\sigma}_k^2\} = E\{\hat{\sigma}_k^4\} - E^2\{\hat{\sigma}_k^2\} = \sigma_k^4(1 + 2\gamma) - \sigma_k^4 = 2\gamma\sigma_k^4$$

Schließlich ergibt sich :

$$\frac{D\{\hat{\sigma}_k^2\}}{E\{\hat{\sigma}_k^2\}} = \sqrt{2\gamma} \approx \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (\text{A.7-6})$$

Mit der angegebenen Näherung erhält man das Resultat (5.4-3). Für unkorrelierte Leitungscodes gilt exakt $\gamma = 1/L$ (leicht einsehbar) und ansonsten gilt $\gamma \approx 1/L$, wie Tabelle A.1 zeigt.

Literaturverzeichnis

Bücher über adaptive Filter

- [1.1] Giordano,A.A.; Hsu,F.M.: Least square estimation with applications to digital signal processing. New York: Wiley 1985
- [1.2] Honig,M.L.; Messerschmitt,D.G.: Adaptive filters. Boston: Kluwer Academic Publishers 1984
- [1.3] Cowan,C.F.N.; Grant,P.M.: Adaptive filters. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1985
- [1.4] Widrow,B.; Stearns,S.D.: Adaptive signal processing. Englewood Cliffs: Prentice Hall 1985
- [1.5] Proakis,J.G.: Digital communications. New York: McGraw-Hill 1983
- [1.6] Haykin,S.: Introduction to adaptive filters. New York: Macmillan 1984
- [1.7] Haykin,S.: Adaptive filter theory. Englewood Cliffs: Prentice Hall 1986

Statistische Theorie der Quantisierung

- [2.1] Widrow,B.: Statistical analysis of amplitude-quantized sampled-data systems. AIEE Trans. Am. Inst. Electr. Eng. Part 2 79(1961)1, 555-568
- [2.2] Widrow,B.: A study of rough amplitude quantization by means of nyquist sampling theory. Dissertation Massachusetts Institute of Technology 1956
- [2.3] Sripad,A.B.; Snyder,D.L.: A necessary and sufficient condition for quantization errors to be uniform and white. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-25(1977)5, 442-448
- [2.4] Masry,E.: The application of random reference sequences to the reconstruction of clipped differentiable signals. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-30(1982)6, 953-963
- [2.5] Masry,E.: The reconstruction of analog signals from the sign of their noisy samples. IEEE Trans. Inform. Theory IT-27(1981)6, 753-745

- [2.6] Barnes,C.W.; Tran,B.N.; Leung,S.H.: On the statistics of fixed-point roundoff error. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-33(1985)3, 595-606
- [2.7] Jayant,N.S.; Rabiner,L.R.: The application of dither to the quantization of speech signals. Bell Syst. Tech. J. BSTJ-51(1972)6, 1293-1304
- [2.8] Korn,G.A.: Hybrid-computer techniques for measuring statistics from quantized data. Simulation 7(1965), 229-239
- [2.9] Schüßler,H.W.: On the influence of noiselike errors in digital systems. Signal Processing 5(1983)4, 319-323

Wertkontinuierliche adaptive Filter

- [3.1] Mueller,K.H.: A new digital echo canceler for two-wire full-duplex data transmission. IEEE Trans. Commun. COM-24(1976)9, 956-962
- [3.2] Mueller,K.H.: Combining echo cancellation and decision feedback equalization. Bell Syst. Tech. J. BSTJ-58(1979)2, 491-500
- [3.3] Weiss,A.; Mitra,D.: Digital adaptive filters: Conditions for convergence, rates of convergence, effects of noise and errors arising from the implementation. IEEE Trans. Inform. Theory IT-25(1979)6, 637-652
- [3.4] Sondhi,M.M.; Mitra,D.: New results on the performance of a well-known class of adaptive filters. Proc. IEEE 64(1976)11, 1583-1597
- [3.5] Rao,C.V.K.P.: Analysis of the steady-state performance in adaptive echo cancelers with correlated data and correlated received signal. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-29(1981)6, 1222-1225
- [3.6] Messerschmitt,D.G.: Echo cancellation in speech and data transmission. IEEE J. Sel. Areas Commun. SAC-2(1984)2, 283-297
- [3.7] Werner,J.J.: Effects of channel impairments on the performance of an in-band data-driven echo canceler. Bell Syst. Tech. J. BSTJ-64(1985)1, 91-113
- [3.8] Mazo,J.E.: On the independence theory of equalizer convergence. Bell Syst. Tech. J. BSTJ-58(1979), 963-993

- [3.9] Widrow,B.; McCool,J.M.; Larimore,M.G.; Johnson,C.R.: Stationary and non-stationary learning characteristics of the LMS adaptive filter. Proc. IEEE 64(1976)8, 1151-1162
- [3.10] Gitlin,R.D.; Weinstein,S.B.: On the required tap-weight precision for digitally implemented, adaptive, mean-squared equalizers. Bell Syst. Tech. J. BSTJ-58(1979)2, 301-321
- [3.11] Gitlin,R.D.; Meadors,H.C.; Weinstein,S.B.: The tap-leakage algorithm : an algorithm for the stable operation of a digitally implemented, fractionally spaced adaptive equalizer. Bell Syst. Tech. J. BSTJ-61(1982)8, 1817-1839
- [3.12] Gitlin,R.D.; Mazo,J.E.; Taylor,M.G.: On the design of gradient algorithms for digitally implemented adaptive filters. IEEE Trans. Circuit Theory CT-20(1973)2, 125-136
- [3.13] Ungerboeck,G.: Theory on the speed of convergence in adaptive equalizers for digital communication. IBM J. Res. Develop. 16(1972), 546-555
- [3.14] Qureshi,S.U.H.: Adaptive equalization. Proc. IEEE 73(1985)9, 1349-1387
- [3.15] Feuer,A.; Weinstein,E.: Convergence analysis of LMS filters with uncorrelated gaussian data. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-33(1985)1, 222-230
- [3.16] Fisher,B.; Bershad,N.J.: The complex LMS adaptive algorithm – transient weight mean and covariance with applications to the ALE. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-31(1983)1, 34-44
- [3.17] Gardner,W.A.: Learning characteristics of stochastic-gradient-descent algorithms : a general study, analysis, and critique. Signal Processing 6(1984), 113-133
- [3.18] Horowitz,L.L.; Senne,K.D.: Performance advantage of complex LMS for controlling narrow-band adaptive arrays. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-29(1981)3, 722-736

Wertdiskrete adaptive Filter

- [4.1] Claasen,T.A.C.M.; Mecklenbräuker,W.F.G.: Comparison of the convergence of two algorithms for adaptive FIR digital filters. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-29(1981)3, 670-678

- [4.2] Bershad,N.J.: Comments on “Comparison of the convergence of two algorithms for adaptive FIR digital filters”. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-33(1985)6, 1604-1606
- [4.3] Claasen,T.A.C.M.; Mecklenbräuker,W.F.G.: Authors’ reply to “Comments on ‘Comparison of the convergence of two algorithms for adaptive FIR digital filters’”. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-34(1986)1, 202-203
- [4.4] Verhoeckx,N.A.M.; Claasen,T.A.C.M.: Some considerations on the design of adaptive digital filters equipped with the sign algorithm. IEEE Trans. Commun. COM-32(1984)3, 258-266
- [4.5] Verhoeckx,N.A.M.; Van den Elzen,H.C.; Snijders,F.A.M.; van Gerwen,P.J.: Digital echo cancellation for baseband data transmission. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-27(1979)6, 768-781
- [4.6] van Gerwen,P.J.; Verhoeckx,N.A.M.; Claasen,T.A.C.M.: Design considerations for a 144 kbit/s digital transmission unit for the local telephone network. IEEE J. Sel. Areas Commun. SAC-2(1984)2, 314-323
- [4.7] Holte,N.; Stueflotten,S.: A new echo canceller for two-wire subscriber lines. IEEE Trans. Commun. COM-29(1981)11, 1573-1581
- [4.8] Robertson,D.J.; Falconer,D.D.: Analysis and simulation of improved echo canceller adaptation algorithms with single-bit correlation multipliers. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-32(1984)5, 1014-1022
- [4.9] Duttweiler,D.L.: Adaptive filter performance with nonlinearities in the correlation multiplier. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-30(1982)4, 578-586
- [4.10] Jorgensen,E.; Kjolas,K.O.: Echo cancelling system based on the sign correlation algorithm. IEEE Global Telecommun. Conf. (GLOBECOM) 1981, C7.5.1-6
- [4.11] Bonnet,M.; Macchi,O.: An echo canceller having reduced word size taps and using the sign algorithm with extra controlled noise. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process ICASSP-1984, 30.2.1-4
- [4.12] Bonnet,M.; Macchi,O.: A low-complexity echo canceller performing the channel phase acquisition. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-34(1986)1, 200-202

- [4.13] Bullock,F.G.: Echo canceller structures for digital loop access systems. Australian Telecomm. Res. 19(1985)1, 23-41
- [4.14] Kwong,C.P.: Dual sign algorithm for adaptive filtering. IEEE Trans. Commun. COM-34(1986)12, 1272-1275
- [4.15] Gersho,A.: Adaptive Filtering with binary reinforcement. IEEE Trans. Inform. Theory. IT-30(1984)2, 191-199
- [4.16] Caraiscos,C.; Liu,B.: A roundoff error analysis of the LMS adaptive algorithm. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-32(1984)1, 34-41
- [4.17] Sari,H.: Performance evaluation of three adaptive equalization algorithms. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process ICASSP-1982, 1385-1389
- [4.18] Macleod,C.J.; Ciapala,E.; Jelonek,Z.J.: Quantisation in non-recursive equalizers for data transmission. Proc. IEEE 122(1975)10, 1105-1110
- [4.19] Boland,F.M.; Normile,J.O.: Quantization and truncation effects in the design of adaptive digital filters. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process ICASSP-1982, 64-68
- [4.20] Sakurai,M.; Murakami,J.: Analysis of quantization effects in adaptive equalizers. Asilomar Conf. Circuits, Systems and Computers 1983, 406-412

Verteilungskonvergenz bei adaptiven Filtern

- [5.1] Bitmead,R.R.: Convergence in distribution of LMS-type adaptive parameter estimates. IEEE Trans. Autom. Control AC-28(1983)1, 54-60
- [5.2] Bershad,N.J.; Qu,L.Z.: On the joint characteristic function of the complex scalar LMS adaptive weight. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. ASSP-32(1984)6, 1166-1175
- [5.3] Kushner,H.J.; Shwartz,A.: Weak convergence and asymptotic properties of adaptive filters with constant gains. IEEE Trans. Inform. Theory IT-30(1984)2, 177-182
- [5.4] Ljung,L.: Analysis of recursive stochastic algorithms. IEEE Trans. Autom. Control AC-22(1977)4, 551-575
- [5.5] Farden,D.C.: Stochastic approximation with correlated data. IEEE Trans. Inform. Theory IT-27(1981)1, 105-113

Sonstiges

- [6.1] Kanemasa,A.; Niwa,K.: An echo cancellation algorithm for full-duplex two-wire data transmission. IEEE Global Telecommun. Conf. (GLOBECOM) 1983, 40.5.1-40.5.5
- [6.2] Claasen,T.A.C.M.; Mecklenbräuker,W.F.G.: Adaptive techniques for signal processing in communications. IEEE Commun. Mag. 23(1985)11, 8-19
- [6.3] Schüßler,H.W.: Digitale Signalverarbeitung. Band I. Berlin: Springer 1988
- [6.4] Ludwig,V.: Basisbandübertragungseinheit UEB 12-03 für Vierdrahtleitungen. Telcom Report 2(1979)6, 418-423
- [6.5] Stoer,J.: Einführung in die Numerische Mathematik I. Heidelberger Taschenbücher Band 105. Berlin: Springer 1972
- [6.6] Bronstein,I.N.; Semendjajew,K.A.: Taschenbuch der Mathematik. (19.Aufl.) Thun: Harri Deutsch 1980
- [6.7] Friedrichs,B.: Analyse und Dimensionierung wertdiskreter adaptiver Kompensationsfilter. ANT Nachrichtentechnische Berichte Heft 5 (1988)